L. Landau e E. Lifshitz

Fisica teorica

Tomo 1

Meccanica

Editori Riuniti Edizioni Mir

Lev D. Landau Evgenij M. Lifšits

Fisica teorica 1

Editori Riuniti Edizioni Mir

Lev D. Landau Evgenij M. Lifšits

Meccanica

Editori Riuniti Edizioni Mir

III edizione, I ristampa: maggio 1994
Titolo originale: *Mechanika*
© Copyright Edizioni Mir, Mosca
© Copyright Editori Riuniti, 1976
Piazza Vittorio Emanuele II, 47 - 00185 Roma
ISBN 88-359-3473-7

Indice

Prefazione all'edizione italiana . . . . . p. 7
Dalla prefazione alla prima edizione russa 8
E. M. Lifšic « Lev Davidovič Landau » 9

Capitolo I. EQUAZIONI DEL MOTO

§ 1. Coordinate generalizzate 27
§ 2. Il principio di minima azione 28
§ 3. Il principio di relatività di Galilei 31
§ 4. Funzione di Lagrange di un punto materiale libero 33
§ 5. Funzione di Lagrange di un sistema di punti materiali 36

Capitolo II. LEGGI DI CONSERVAZIONE

§ 6. Energia 42
§ 7. Quantità di moto 44
§ 8. Centro di massa 46
§ 9. Momento della quantità di moto 49
§ 10. Similitudine meccanica 53

Capitolo III. INTEGRAZIONE DELLE EQUAZIONI DEL MOTO

§ 11. Moto unidimensionale 57
§ 12. Determinazione dell'energia potenziale dal periodo delle oscillazioni 60
§ 13. Massa ridotta 62
§ 14. Moto in un campo centrale 63
§ 15. Il problema di Keplero 70

Capitolo IV. URTI DI PARTICELLE

§ 16. Disintegrazione di particelle 78
§ 17. Urto elastico di particelle 82
§ 18. Diffusione di particelle 86
§ 19. Formula di Rutherford 93
§ 20. Diffusione a piccoli angoli 96

Capitolo V. PICCOLE OSCILLAZIONI

§ 21. *Oscillazioni libere unidimensionali* . . . . . p. 99
§ 22. *Oscillazioni forzate* 103
§ 23. *Oscillazioni dei sistemi con più gradi di libertà* . . 108
§ 24. *Oscillazioni delle molecole* 115
§ 25. *Oscillazioni smorzate* 220
§ 26. *Oscillazioni forzate in presenza di attrito* 124
§ 27. *Risonanza parametrica* 127
§ 28. *Oscillazioni anarmoniche* 133
§ 29. *Risonanza nelle oscillazioni non lineari* 137
§ 30. *Moto in un campo rapidamente oscillante* 144

Capitolo VI. MOTO DEI CORPI SOLIDI

§ 31. *Velocità angolare* 148
§ 32. *Tensore d'inerzia* 151
§ 33. *Momento della quantità di moto di un solido* . . . 161
§ 34. *Equazioni del moto di un corpo solido* 163
§ 35. *Angoli di Eulero* 166
§ 36. *Equazioni di Eulero* 172
§ 37. *Trottola asimmetrica* 174
§ 38. *Contatto fra i corpi solidi* 182
§ 39. *Moto in un sistema di riferimento non inerziale* . . 187

Capitolo VII. EQUAZIONI CANONICHE

§ 40. *Equazioni di Hamilton* 193
§ 41. *Funzione di Routh* 196
§ 42. *Parentesi di Poisson* 198
§ 43. *Azione come funzione delle coordinate* 202
§ 44. *Principio di Maupertuis* 205
§ 45. *Trasformazioni canoniche* 209
§ 46. *Teorema di Liouville* 212
§ 47. *Equazione di Hamilton-Jacobi* 214
§ 48. *Separazione delle variabili* 216
§ 49. *Invarianti adiabatici* 223
§ 50. *Variabili canoniche* 226
§ 51. *Conservazione di un invariante adiabatico* 229
§ 52. *Moto condizionatamente periodico* 232

Indice analitico 238

Prefazione all'edizione italiana

Il Corso di fisica teorica, *che ora viene proposto all'attenzione del lettore italiano nella sua lingua, è nato su iniziativa del mio maestro e amico, Lev Landau. Il nostro lavoro comune su questi libri iniziò già nella seconda metà degli anni '30.*

In tutti i volumi di questo Corso abbiamo cercato di esporre il materiale in modo che risultasse chiaro, per quanto possibile, il senso fisico della teoria. Ci siamo sforzati inoltre di sviluppare in modo completo l'apparato matematico nella forma piú adatta alle necessità pratiche e, al tempo stesso, nella forma piú semplice; abbiamo cercato di evitare quelle complessità matematiche che non siano giustificate da considerazioni fisiche.

Era propria dell'opera scientifica di Landau la tendenza alla chiarezza, la tendenza a semplificare le cose complesse e, quindi, a rivelare la bellezza delle leggi della natura nella loro vera semplicità. Landau cercò sempre di sviluppare questa tendenza nei suoi allievi.

Nei decenni trascorsi dalla prima edizione i vari volumi di questo Corso sono stati ristampati piú volte. Per ogni nuova edizione i libri sono stati sempre rielaborati ed ampliati tenendo conto delle ultime scoperte della scienza. Questo lavoro si è reso oggi piú difficile quando lo si deve fare senza la partecipazione di Landau.

La traduzione italiana dei primi tre volumi del Corso è stata condotta sulla base dell'ultima edizione russa appena uscita. Il lavoro di rielaborazione sugli altri volumi continua ancora e di esso sarà tenuto conto, per quanto possibile, nella presente edizione italiana.

Questo primo volume del Corso di fisica teorica contiene un articolo dedicato a Landau, che io ho scritto nel 1969 per l'edizione postuma russa delle sue opere. Voglio sperare che questo articolo aiuti il lettore italiano a farsi almeno un'idea della personalità di questo straordinario uomo.

Mosca, gennaio 1975.

E. Lifšic

Dalla prefazione alla prima edizione russa

Con il presente volume ci proponiamo di iniziare la nuova edizione completa della «Fisica teorica». Il piano generale dell'opera comprende:

1. Meccanica. 2. Teoria dei campi. 3. Meccanica quantistica (teoria non relativistica). 4. Teoria quantistica relativistica. 5. Fisica statistica. 6. Idrodinamica. 7. Teoria della elasticità. 8. Elettrodinamica dei mezzi continui. 9. Cinetica fisica.

Mosca, luglio 1957

L. D. Landau e E. M. Lifšic

LEV DAVIDOVIČ LANDAU

(1908-1968)

Dal giorno in cui moriva Lev Davidovič Landau, il 1 aprile 1968, non è trascorso molto tempo, ma la sorte ha voluto che già oggi guardiamo questa figura da una certa distanza. Questa distanza ci permette non soltanto di valutare meglio la grandezza dello scienziato, la cui opera acquista un'importanza sempre piú evidente, ma anche di vedere piú chiaramente la nobiltà di animo dell'uomo stesso. Egli era profondamente buono e aveva uno spiccato senso della giustizia. È indubbio che anche ciò costituisce la causa della sua popolarità come scienziato e come maestro, dell'ammirazione e della stima che provavano per lui i suoi allievi diretti e indiretti, ammirazione e stima che si sono manifestate con straordinaria forza nei giorni in cui si lottava per salvargli la vita dopo un pauroso incidente.

A Landau è toccata la tragica sorte di morire due volte. La prima volta accadde il 7 gennaio 1962, sulla strada tra Mosca e Dubna, quando la sua automobile andò ad urtare contro un autocarro. L'epica storia della successiva battaglia per salvare la vita di L. D. Landau è prima di tutto una storia di abnegazione e di bravura di numerosi medici e infermieri. Ma al tempo stesso è la storia di un'eccezionale solidarietà collettiva di colleghi ed amici. L'incidente scosse tutto il mondo scientifico provocando una reazione spontanea e immediata. La clinica nella quale Landau fu ricoverato in stato di coma divenne il centro di coloro — allievi e colleghi — che si sforzavano, nella misura delle proprie possibilità, di aiutare i medici nella loro lotta disperata per salvare L. D. Landau.

« La loro impresa collettiva iniziò subito dal primo giorno. Eminenti scienziati, pur non essendo competenti in medicina, accademici, membri corrispondenti dell'Accademia, candidati e dottori in scienze), persone della stessa generazione di Landau allora cinquantaquattrenne, allievi di Landau, giovanissimi allievi dei suoi allievi, tutti svolgevano volontariamente mansioni di fattorino, autista, intermediario, fornitore, segretario, infermiere e persino di facchino e manovale. Il loro quartiere generale, sorto spontaneamente, si stabilì nello studio del primario della*

---

*) Titoli, successivi alla laurea, conferiti nell'URSS per meriti scientifici (N.d.R.).

clinica n. 50 diventando un vero centro organizzativo atto ad eseguire di giorno e di notte, in modo incondizionato e urgente, tutte le prescrizioni dei medici curanti.

87 fisici teorici e sperimentatori parteciparono a quest'opera volontaria di salvataggio. Fu approntata una guida alfabetica con telefoni e indirizzi di tutti e di tutto: persone ed enti di cui si poteva aver bisogno in ogni istante. Essa conteneva 223 numeri di telefono! Altri ospedali, autorimesse, aerodromi, dogane, farmacie, ministeri, luoghi di eventuali arrivi di medici consulenti.

Nei giorni piú tragici in cui sembrava che « Dau morisse » — furono almeno quattro — davanti all'edificio di sette piani della clinica c'erano pronte 8-10 auto... Nel momento in cui, il 12 gennaio, si rese necessario l'apparecchio per la respirazione artificiale, uno dei fisici propose di costruirlo immediatamente nei laboratori dell'Istituto di problemi fisici. Era una proposta inutile e ingenua, ma meravigliosa per lo spirito che l'aveva suggerita. Alcuni fisici andarono a prendere l'apparecchio nell'Istituto di poliomelite e lo trasportarono a mano nella corsia dove giaceva Landau ansimante. Essi salvarono cosí il loro collega, maestro ed amico.

È impossibile raccontare tutto... Fu un vero e proprio atto di fratellanza tra i fisici... »)*

Dunque, la vita di Landau venne salvata. Ma quando tre mesi dopo egli riprese conoscenza, non era piú la persona che avevamo conosciuto prima. Egli non potè mai piú riprendersi dalle conseguenze dell'incidente e le sue capacità non si ristabilirono mai completamente. La storia dei sei anni successivi è soltanto la storia di lunghe sofferenze e di dolore.

* * *

Lev Davidovič Landau nacque il 22 gennaio 1908 a Baku nella famiglia di un ingegnere che lavorava nei pozzi di petrolio. Sua madre era medico e per un periodo si occupò di ricerca nel campo della fisiologia.

All'età di tredici anni Landau terminò la scuola media superiore. Già allora egli si appassionava alle scienze esatte rivelando molto presto le sue doti di matematico. Da solo egli apprese l'analisi matematica e diceva spesso che neppure si ricordava di quando non sapeva derivare e integrare.

I genitori di Landau ritennero che era ancora troppo giovane per iscriverlo all'università, e cosí per un anno egli frequentò una scuola tecnica di studi economici. Nel 1922 egli si iscrisse all'università di Baku dove studiò contemporaneamente in due facoltà: matematico-fisica e chimica. In seguito L. D. Landau non continuò la chimica, ma conservò per tutta la vita interesse per questa scienza.

---

*) « Literaturnaia gazeta », 21 luglio 1962 (D. Danin, *Solidarietà*).

Nel 1924 L. D. Landau passò alla facoltà di fisica dell'università di Leningrado. In questa città, che era allora il centro principale della fisica sovietica, Landau per la prima volta si accostò alla fisica teorica che in quegli anni subiva un periodo impetuoso. Egli si tuffò nello studio con tutto l'ardore del suo entusiasmo giovanile. Per l'eccessivo lavoro si prendeva spesso esaurimenti tali da non poter dormire di notte perseguitato dalle formule che gli sembrava di vedere dappertutto.

Egli diceva piú tardi che in quell'epoca si sentí scosso dall'incredibile bellezza della teoria della relatività generale (talvolta affermava persino che tale ammirazione dopo una prima conoscenza con questa teoria doveva essere, a suo avviso, un sintomo che in generale ogni vero fisico deve avere). Egli ricordava anche in quale stato di estasi lo condusse lo studio degli articoli di Heisenberg e di Schrödinger, che segnarono l'avvento della nuova meccanica quantistica. Landau riconosceva che quegli articoli gli permisero non soltanto di godere della vera bellezza del pensiero scientifico, ma anche di provare un'acuta sensazione della forza del genio umano il cui trionfo piú grande è nella capacità dell'uomo di capire le cose che egli non arriva ad immaginare. E tali sono, naturalmente, proprio la curvatura dello spazio-tempo e il principio di indeterminazione.

Nel 1927 Landau prese la laurea e divenne aspirante di ruolo presso l'Istituto di fisica tecnica di Leningrado. A quegli anni risalgono i suoi primi lavori scientifici. Nel 1926 egli pubblicò la teoria delle intensità degli spettri di molecole biatomiche[1]), e già nel 1927 compare il suo lavoro sul problema dell'irraggiamento nella meccanica quantistica, nel quale per la prima volta venne introdotta la descrizione dello stato di sistemi mediante la matrice densità.*

La dedizione alla fisica e i primi successi scientifici erano offuscati, però, dalla morbosa timidezza nei contatti con la gente, cosa che gli provocava molte sofferenze e che, a volte, come egli stesso riconoscerà piú tardi, lo portava alla disperazione. Quei mutamenti che con gli anni avvennero in lui e che lo trasformarono in una persona piena di vita, capace di sentirsi libera ovunque e sempre, sono in misura notevole il risultato dell'autodisciplina che gli era propria e del sentimento di responsabilità nei confronti di sé stesso. Queste qualità, rinforzate da una mente sobria e autocritica, gli permisero di fare di sé stesso un uomo dotato di una rara capacità di sentirsi felice. La stessa sobrietà di mente l'aiutava sempre a distinguere nella vita le cose vere dalle cose false, alle quali non valeva la pena attribuire troppa importanza, e a conservare quindi l'equilibrio di spirito nei momenti piú duri che non mancarono nella sua vita.

---

*) Egli non sapeva però che un anno prima questi risultati erano già stati pubblicati da H. Hönl e F. London.

Qui e piú avanti le cifre indicano il numero dell'articolo pubblicato nel libro «Collected papers of L. D. Landau», Pergamon Press, 1965.

Nel 1929, Landau fu inviato dal Commissariato del popolo per l'istruzione pubblica in missione scientifica all'estero e per un anno e mezzo lavorò in Danimarca, Inghilterra e Svizzera. La piú importante per lui fu la permanenza a Copenaghen, dove nell'Istituto di fisica teorica si riunivano dal grande Niels Bohr fisici di tutta Europa e dove, durante i famosi simposi diretti da Bohr, venivano affrontati i problemi della fisica teorica di quell'epoca. L'atmosfera scientifica rafforzata dal fascino della persona stessa di Bohr esercitò un'influenza decisiva sulla formazione della concezione fisica del mondo di Landau. In seguito egli si considerò sempre allievo di Niels Bohr. Egli visitò Copenaghen ancora due volte: nel 1933 e nel 1934. Durante la sua permanenza all'estero Landau scrisse i lavori sulla teoria del diamagnetismo del gas di elettroni[4] e fece studi sulle restrizioni imposte alla misurabilità delle grandezze fisiche nel campo quantistico relativistico ([6], in collaborazione con Peierls).

Dopo il suo ritorno a Leningrado nel 1931, Landau lavorò all'Istituto di fisica tecnica e nel 1932 si trasferí a Kharkov dove fu direttore della sezione teorica dell'appena organizzato Istituto di fisica tecnica dell'Ucraina. Contemporaneamente egli diresse la cattedra di fisica teorica nel Politecnico di Kharkov e dal 1935 la cattedra di fisica generale presso l'Università di Kharkov.

Gli anni trascorsi a Kharkov furono per Landau anni di intenso lavoro e di molteplice ricerca scientifica). Proprio a Kharkov iniziò la sua attività di insegnante, là furono gettate le fondamenta della sua scuola di fisica teorica.*

La fisica teorica del XX secolo è ricca di nomi gloriosi. Fra questi ci fu anche Landau. La sua influenza sullo sviluppo della scienza è ben lontana dall'esaurirsi nel suo contributo personale. L'insigne fisico fu al tempo stesso un grande maestro, maestro per vocazione. Sotto questo aspetto si potrebbe forse confrontare Landau soltanto con il suo maestro, Niels Bohr.

Sin da giovane egli si interessò vivamente ai problemi dell'insegnamento della fisica teorica, cosí come della fisica in generale. Proprio a Kharkov egli per la prima volta si mise a elaborare i programmi del « minimo teorico »: nozioni fondamentali di fisica teorica indispensabili ai fisici sperimentali e, separatamente, a coloro che volevano dedicarsi alla ricerca professionale nel campo della fisica teorica. Non limitandosi solo alla elaborazione dei programmi, egli tenne un corso di fisica teorica per i collaboratori dell'Istituto di fisica tecnica dell'Ucraina e per gli

---

*) Dell'intensa attività scientifica di Landau in quel periodo si può giudicare semplicemente elencando i lavori portati a termine nel solo 1936: teoria delle transizioni di fase di seconda specie[29], teoria dello stato intermedio dei superconduttori[30], equazione cinetica nel caso dell'interazione coulombiana[24], teoria delle reazioni monomolecolari[23], proprietà di metalli a temperature molto basse[25], teoria della dispersione e dell'assorbimento del suono[22], [28], teoria dei fenomeni fotoelettrici nei semiconduttori[21].

studenti del Politecnico di Kharkov. Appassionato all'idea di un rinnovamento globale dell'insegnamento della fisica, egli assunse la direzione della cattedra di fisica generale presso l'Università di Kharkov (piú tardi, nel periodo postbellico, continuò a tenere un corso di fisica generale presso la facoltà di fisica dell'Università di Mosca).

Sempre a Kharkov gli venne l'idea di scrivere un Corso completo di fisica teorica e un Corso di fisica generale, idea che egli cominciò subito a tradurre in pratica. Durante tutta la vita Landau sognò di scrivere libri di fisica a tutti i livelli: da testi per la scuola secondaria a un corso di fisica teorica destinato agli specialisti. Di fatto, prima del fatale incidente, furono portati a termine quasi tutti i volumi della Fisica teorica e i primi volumi del Corso di fisica generale e della Fisica per tutti. Egli accarezzava anche l'idea di scrivere testi di matematica per fisici, che avrebbero dovuto diventare « guida d'azione », insegnare ad applicare praticamente la matematica alla fisica ed essere privi del rigore e della complessità superflui a tale scopo. La realizzazione di questo programma non fu mai iniziata.

Landau attribuiva in generale grande importanza al fatto che i fisici avessero padronanza dell'apparato matematico. Il grado di questa padronanza deve essere tale che le difficoltà matematiche non devono distogliere l'attenzione, per quanto possibile, dalle difficoltà fisiche del problema, soprattutto se si tratta di metodi matematici ordinari. Questo può essere raggiunto soltanto mediante un sufficiente esercizio. Ma come mostra l'esperienza, il metodo esistente e i programmi universitari di matematica per i fisici spesso non assicurano tale esercizio. L'esperienza mostra anche che lo studio della matematica appare ad un fisico, che ha già iniziato la sua attività pratica, troppo « noioso ».

Perciò la prima cosa alla quale Landau sottoponeva chiunque volesse entrare nel gruppo dei suoi allievi era la prova di matematica nei suoi aspetti « pratici » di calcolo). Chi superava questa prova poteva poi passare a dare gli esami nei sette campi del « minimo teorico » che includeva nozioni fondamentali di tutti i campi della fisica teorica. Landau riteneva che queste nozioni dovessero essere il bagaglio scientifico di ogni fisico, a prescindere dalla sua futura specializzazione. Egli, beninteso, non chiedeva a nessuno di essere universale nella stessa misura in cui lo era lui. Ma in ciò si rivelava la sua convinzione che la fisica teorica rappresenti una scienza a sé, con metodi propri.*

In un primo tempo Landau faceva personalmente tutti gli esami del «minimo teorico». Ma dopo, quando il numero degli esaminandi

---

*) Si chiedeva di saper calcolare un qualsiasi integrale indefinito (espresso da funzioni elementari) e risolvere una normale equazione differenziale, di conoscere l'analisi vettoriale e l'algebra tensoriale, nonché i fondamenti della teoria delle funzioni con variabile complessa (teoria dei residui, metodo di Laplace). Si supponeva, inoltre, che campi della matematica come l'analisi tensoriale, la teoria dei gruppi, ecc. sarebbero stati studiati in quei campi della fisica in cui essi venivano applicati.

aumentò troppo, questi impegni vennero distribuiti anche tra i suoi collaboratori piú vicini. Ma il diritto di fare il primo esame e di fare la prima conoscenza con ogni giovane Landau lo ha sempre riservato per sé. A tale scopo chiunque poteva incontrarlo: bastava telefonargli ed esprimere il proprio desiderio.

È naturale che non tutti coloro che si mettevano a studiare il « minimo teorico » avevano capacità e tenacia per terminarlo. Dal 1934 al 1961 hanno superato questa prova in tutto 43 persone. Quanto fosse efficace quella scelta si può giudicare anche solo in base ai seguenti dati formali: di queste persone 7 sono già accademici e 16 dottori in scienze.

Nella primavera del 1937 Landau si trasferí a Mosca dove assunse l'incarico di capo sezione teorica dell'Istituto di problemi fisici, costruito poco prima per P. L. Kapitza. Qui egli passò il resto della sua vita; in questo istituto, diventato per lui una casa paterna, la sua attività raggiunse l'apice. Proprio qui Landau creò, in un'interazione magnifica con ricerche sperimentali, quello che possiamo considerare il tema principale della sua vita di scienziato: la teoria dei liquidi quantistici.

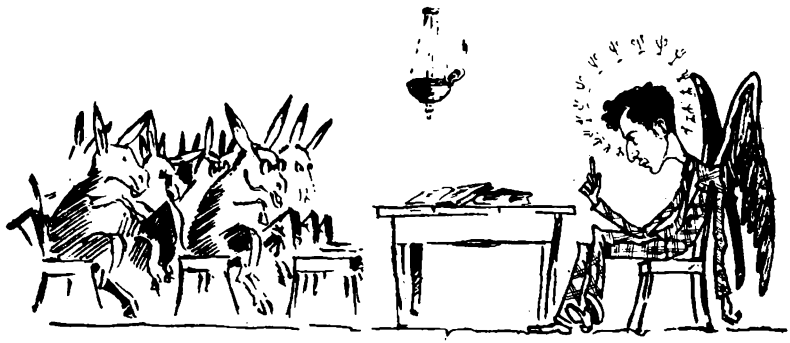
Sempre mentre lavorava qui gli vennero conferiti riconoscimenti esterni dei suoi meriti. Nel 1946 egli diventa membro effettivo dell'Accademia delle Scienze dell'URSS. È insignito di molte decorazioni (tra cui due ordini di Lenin) e di titolo di Eroe del Lavoro socialista: onorificienze sia per i successi puramente scientifici che per il contributo alla realizzazione pratica di compiti di stato. Gli è conferito tre volte il Premio di Stato e nel 1962 il Premio Lenin. Non mancavano neppure onorificienze dall'estero. Già nel 1951 è eletto membro dell'Accademia della Danimarca e nel 1956 dei Paesi Bassi. Nel 1959 diventa membro della Società di fisica britannica e nel 1960 membro straniero della Società reale britannica. Lo stesso anno è eletto membro dell'Accademia nazionale delle scienze degli Stati Uniti e dell'Accademia americana delle scienze e delle arti. Nel 1960 Landau è insignito del Permio F. London (USA) e della medaglia Max Planck (RFT). Ed infine, nel 1962 gli è conferito il Premio Nobel « per la ricerca pionieristica nella teoria dello stato condensato della materia e, in particolare, dell'elio liquido ».

L'influenza scientifica di Landau non si limita ai suoi allievi diretti. Egli era profondamente democratico nella vita scientifica (come, tra l'altro, nella vita privata; gli furono sempre estranei boria e servilismo). Per consigli o osservazioni critiche, sempre ben nette e chiare, gli si poteva rivolgere chiunque, indipendentemente dai suoi meriti scientifici e titoli, ma ad un'unica condizione: si doveva trattare di una cosa seria e non di raziocinio cervellotico vacuo — cosa che egli detestò sempre nella scienza — camuffatto da complessità pseudoscientifiche prive di contenuto e di risultato. Alla sua mente era propria un'arguzia critica; questa qualità insieme con un metodo profondamente fisico nell'affrontare i problemi rendevano attraente e utile la discussione con lui.

Nel dibattito egli era veemente e aspro ma non sgarbato, arguto e ironico ma non caustico. Una targa sulla porta del suo ufficio nell'Istituto di Kharkov diceva:

Lev Landau.
Attenzione, morde!

Con gli anni il suo carattere e le maniere divennero piú miti, ma non mutarono il suo entusiasmo per la scienza e la sua coerenza scientifica senza compromessi. Dietro la sua apparente asprezza si celavano imparzialità scientifica, un grande cuore e una grande bontà. Quanto aspra



Dau ha detto...

e spietata era la sua critica tanto sincero era il suo desiderio di aiutare con un consiglio il successo altrui e altrettanto calda era la sua approvazione.

Questi tratti del carattere e del talento di Landau gli meritarono la posizione di arbitro supremo tra i suoi allievi e colleghi.) È indubbio che questo aspetto dell'attività di Landau e il suo prestigio scientifico e morale, che serviva di freno ai lavori precoci, hanno determinato in misura notevole l'alto livello della fisica teorica nell'URSS.*

Il contatto scientifico costante con numerosi colleghi e allievi era anche per Landau fonte di conoscenze. Lo stile di lavoro di Landau era contrassegnato da un tratto assai originale: da molto tempo, già dal periodo di Kharkov, egli non leggeva articoli e libri scientifici. Per avere queste conoscenze gli servivano le numerose discussioni e gli interventi al seminario scientifico da lui diretto.

Questo seminario si tenne regolarmente, una volta alla settimana, per quasi trent'anni. Negli ultimi tempi esso acquistò il carattere di una riunione generale dei fisici di tutta Mosca. Intervenire al seminario era il dovere sacrosanto di tutti i suoi allievi e collaboratori, e Landau stesso con straordinaria serietà e zelo selezionava il materiale per gli interventi.

---

*) Questa posizione è espressa dalla caricatura di A. A. Jusefovič riprodotta sopra.

Egli si interessava ed era ugualmente competente in tutti i campi della fisica, cosicché i partecipanti al seminario spesso si trovavano in difficoltà nel passare con Landau dalla discussione, per esempio, delle proprietà delle particelle « strane » direttamente a considerazioni sullo spettro energetico degli elettroni nel silicio. L'ascoltare gli interventi non era mai per Landau una formalità: non si calmava finché non veniva messa completamente in luce l'essenza di un lavoro e non vi erano state eliminate le tracce della « filologia », cioè delle asserzioni infondate e delle proposte avanzate secondo il principio: « e perché non così ». Dopo una simile discussione e critica molti lavori si dichiaravano « patologia » e Landau non ne aveva piú alcun interesse. Viceversa, articoli che contenevano effettivamente idee e risultati nuovi venivano iscritti al cosiddetto « fondo d'oro » e Landau li ricordava sempre.

Di fatto, gli bastava soltanto conoscere l'idea principale di un lavoro per riprodurne tutti i risultati. Di regola, gli era piú facile ottenerli a modo suo anziché seguire nei dettagli il ragionamento dell'autore. Cosí egli ottenne per sé e ripensò profondamente la maggior parte dei risultati fondamentali in tutti i campi della fisica teorica). Con questo si spiega, evidentemente, la sua fenomenale capacità di dare una risposta a quasi tutte le domande di fisica che gli venivano poste.*

Allo stile scientifico di Landau era estranea la tendenza, purtroppo abbastanza diffusa, di complicare le cose semplici (spesso giustificata con motivi di generalità e di rigore che risultano di solito illusori). Egli tendeva sempre al contrario, a rendere semplici le cose complicate, a rivelare in modo piú chiaro la vera semplicità dei fenomeni basati sulle leggi della natura. Di questo, di saper « rendere banali » le cose, come egli stesso diceva, era particolarmente fiero.

*La tendenza alla semplicità e all'ordine era propria, in generale, della mentalità di Landau. Essa si manifestava non soltanto nelle cose serie, ma anche nelle cose semiserie e persino nei suoi tipici scherzi**). Cosí, gli piaceva classificare tutto: dalle donne (secondo il grado della loro bellezza) ai fisici (secondo l'efficacia del loro contributo nella scienza). Quest'ultima classifica si basava su un sistema di cinque punti su scala logaritmica; per esempio, si sottintendeva che il contributo di un fisico della seconda classe era di 10 volte superiore a quello di un fisico della terza (nella quinta classe andavano a finire i « patologi »). Sempre secondo questa classifica, Einstein occupava la classe « un mezzo », mentre Bohr, Heisenberg, Schrödinger, Dirac ed alcuni altri appartenevano alla prima classe. Per lungo tempo Landau si mise modesta-*

---

*) Questo spiega, tra l'altro, la mancanza di alcuni necessari riferimenti negli articoli di Landau, ciò che non era un atto intenzionale. In certi casi, però, egli poteva omettere un riferimento anche intenzionalmente se riteneva troppo banale un dato problema: i suoi criteri in merito erano molto alti.

**) È caratteristico, tuttavia, che questo tratto non si riferiva alle abitudini di Landau nella vita, diciamo, quotidiana. Egli era tutt'altro che ordinato, e molto presto attorno a lui si creava una « zona di disordine ».

mente nella classe due e mezzo e soltanto piú tardi si autopromosse alla seconda classe.

Egli lavorava sempre e molto (mai alla scrivania, ma sdraiato di solito su un divano). Per ogni scienziato il riconoscimento dei risultati del proprio lavoro è in una certa misura importante; è ovvio che questo aveva un'importanza sostanziale anche per Landau. Tuttavia, si può affermare che egli attribuiva alle questioni della priorità molto meno importanza di quanto si faccia di solito. È indubbio comunque che lo stimolo interno al lavoro era per Landau non la sete di gloria, bensí l'insaziabile curiosità, l'inesauribile passione di conoscere le leggi della natura nelle loro rivelazioni grandi e piccole. Mai occorre lavorare per scopi estranei, per fare una scoperta; in questo modo non si ottiene niente: egli non perdeva mai l'occasione per ripetere questa semplice verità.

La cerchia di interessi di Landau al di fuori della fisica era molto vasta. Oltre alle scienze esatte, egli amava molto — e la conosceva bene— la storia. Lo interessavano vivamente ed impressionavano profondamente tutte le arti, ad eccezione della musica (e anche del balletto).

Coloro che ebbero la fortuna di trovarsi per lunghi anni tra i suoi allievi e amici sapevano che il nostro Dau, come lo chiamavano amici e colleghi), non invecchiava. In sua compagnia non ci si annoiava mai. La sua personalità brillante non impallidiva e il vigore scientifico non si indeboliva. Tanto piú assurdo e terribile per questo ci sembra il caso che ha interrotto la sua brillante attività.*

* * *

Gli articoli di Landau sono contrassegnati, come regola, da tutti i tratti intrinseci del suo stile scientifico: chiarezza e precisione dell'impostazione fisica dei problemi, procedimento diretto ed elegante per la loro soluzione, niente di superfluo. Persino oggi, dopo tanti anni, la maggior parte dei suoi articoli non richiederebbe alcuna modifica.

La breve rassegna che segue ha il solo scopo di aiutare ad orientarsi tra i molti e diversi lavori di Landau, nonché di precisare un po' il posto che spetta a questi lavori nella storia della fisica, cosa che forse non sempre è evidente per il lettore moderno.

Il tratto piú caratteristico dell'opera scientifica di Landau è la vastità quasi senza precedenti del campo dei suoi interessi; esso abbraccia tutta la fisica teorica: dall'idrodinamica alla teoria quantistica dei campi. Mentre la specializzazione si restringeva sempre di piú, e le vie scientifiche prese dai suoi allievi a poco a poco divergevano, Landau stesso li riuniva tutti conservando costantemente un interesse veramente straordinario per tutto. La fisica con lui ha perduto forse uno degli ultimi grandi universali.

---

*) Landau amava dire che questo soprannome è dovuto alla pronuncia alla francese del suo cognome: Landau = L'âne Dau (l'asino Dau).

Un rapido sguardo all'elenco dei suoi lavori mostra che nella vita di Landau è impossibile individuare un periodo più o meno lungo in cui egli abbia lavorato soltanto in qualche singolo campo della fisica. Per questo nell'enumerare i suoi lavori non seguiremo l'ordine cronologico ma, per quanto possibile, adotteremo il principio tematico. Iniziamo dai lavori dedicati alle questioni generali della meccanica quantistica.

Fra questi ci sono, soprattutto, alcuni lavori giovanili di Landau. Considerando il problema del frenamento per radiazione, egli introdusse per la prima volta il concetto di descrizione incompleta quantistica mediante delle grandezze che più tardi furono chiamate matrici densità[2]*. In questo lavoro la matrice densità venne introdotta nella rappresentazione dell'energia.*

Due suoi articoli[7,9] *sono dedicati al calcolo delle probabilità dei processi quasi-classici. La complessità di questo problema è dovuta al fatto che, essendo le funzioni d'onda quasi - classiche esponenziali (con grande esponente immaginario), l'espressione integranda negli elementi di matrice risulta una grandezza rapidamente oscillante, cosa che rende molto difficile persino la stima dell'integrale. Prima dei lavori di Landau tutti gli studi fatti su questi problemi risultavano di fatto sbagliati. Landau fu il primo ad introdurre un metodo generale per il calcolo degli elementi di matrice quasi-classici e ad applicarlo a un gruppo di processi concreti.*

Nel 1930 Landau (con R. Peierls) pubblicò uno studio dettagliato sulle limitazioni imposte alla descrizione quantistica dalle condizioni relativistiche[6]*; questo articolo suscitò a suo tempo accese discussioni. Il suo risultato principale (oltre a mettere in luce il problema della indeterminazione della coordinata per una singola particella) consistette nello stabilire, in linea di principio, i limiti della possibilità di misurare l'impulso in un intervallo di tempo finito. Ne seguiva che nel campo quantistico relativistico non si può misurare nessuna variabile dinamica, che caratterizza le particelle nella loro interazione, e che le uniche quantità misurabili sono gli impulsi (o le polarizzazioni) delle particelle libere. Questa è l'origine fisica delle complessità che nascono quando si vuole trasportare nel campo relativistico metodi della meccanica quantistica ordinaria, metodi operanti con concetti che perdono qui il loro significato. Landau ritornò ancora su questo problema nel suo ultimo articolo pubblicato*[100]*, nel quale espresse la convinzione che gli operatori* ψ*, come portatori di un'informazione inosservabile, e con essi l'intero metodo hamiltoniano, avrebbero dovuto scomparire dalla futura teoria.*

A questa convinzione Landau fu portato dai risultati dei suoi studi sui fondamenti dell'elettrodinamica quantistica[78-81,86] *eseguiti nel 1954 - 1955 (in collaborazione con A. A. Abrikosov, I. M. Khalatnikov e I. J. Pomeranciuk). Questi studi partivano dalla rappresentazione dell'interazione puntuale come limite dell'interazione non locale al tendere a zero del raggio di interazione. Questo permise immedia-*

tamente di ottenere espressioni finite. In seguito risultò possibile sommare i termini principali dell'intero gruppo della teoria delle perturbazioni e, finalmente, furono ottenute le espressioni asintotiche (a grandi impulsi) per le grandezze fondamentali dell'elettrodinamica quantistica: le funzioni di Green e « la parte al vertice ». Da queste espressioni venne dedotta, a sua volta, la relazione fra la vera carica e la vera massa e la carica « intrinseca » dell'elettrone. Anche se questi calcoli furono eseguiti supponendo che la carica « intrinseca » fosse piccola, furono avanzati validi motivi in favore dell'ipotesi che la formula esprimente la relazione fra la carica vera e la carica « intrinseca » conservi la sua applicabilità, qualunque sia il valore dell'ultima. Lo studio della formula mostra allora che nel limite dell'interazione puntuale la carica vera si annulla, ossia la teoria si « annulla »). (Una rassegna di questi problemi è data negli articoli[84,89].)*

Soltanto il futuro potrà mostrare quanto sia giustificato il programma di edificazione della teoria relativistica quantistica dei campi tracciato da Landau[100]). Negli ultimi anni, prima dell'incidente, egli lavorò intensamente in questa direzione. In questo campo egli elaborò, in particolare, un metodo generale per determinare le singolarità delle grandezze che figurano nel metodo dei diagrammi della teoria quantistica dei campi[98].

*Alla scoperta della non conservazione della parità nelle interazioni deboli, nel 1956, Landau rispose immediatamente proponendo la teoria del neutrino con elicità fissa (« neutrino bicomponente »)[92]**) e avanzò anche il principio di conservazione della « parità combinata », come egli chiamò l'applicazione congiunta dell'inversione dello spazio e della coniugazione delle cariche. Secondo l'idea di Landau, doveva essere cosí « salvata » la simmetria dello spazio, mentre l'asimmetria era nelle particelle stesse. Infatti, questo principio trovò un'applicabilità piú larga della legge di conservazione della parità. Come è noto, però, negli ultimi anni sono stati scoperti processi in cui non si conserva nemmeno la parità combinata; il significato di questa violazione è ancora da definire.*

Alla fisica nucleare si riferisce un lavoro di Landau[31] pubblicato nel 1937. Esso rappresenta un'elaborazione quantitativa delle idee avanzate poco prima da N. Bohr. Il nucleo vi è considerato, applicando i metodi della fisica statistica, come goccia di un « liquido quantistico ». È da notare che non vennero fatte supposizioni azzardate sul modello contrariamente a quanto altri autori avevano fatto precedentemente. In

---

*) In relazione con la ricerca di una dimostrazione piú rigorosa di questa asserzione l'articolo[100] contiene una frase molto caratteristica di Landau: « data la brevità della nostra vita, non possiamo permetterci il lusso di occuparci delle questioni che non promettono risultati nuovi ».

**) Contemporaneamente e indipendetemente questa teoria venne elaborata da Salam e anche da Lee e Yang.

particolare, egli ottenne per la prima volta una relazione fra le distanze medie dei livelli dei nucleoni e le loro larghezze.

La mancanza di modelli contraddistingue un altro lavoro di Landau (in collaborazione con J. A. Smorodinskij) dove egli sviluppò la teoria della diffusione protone-protone. La sezione di d'urto vi è espressa con parametri il cui significato non è legato a ipotesi concrete circa il potenziale di interazione delle particelle.

Un esempio di virtuosismo tecnico è dato nel lavoro (in collaborazione con J. B. Rumer) sulla teoria della cascata elettrofotonica degli sciami elettronici nei raggi cosmici[36]*; i fondamenti fisici questa teoria erano stati dati prima da un gruppo di autori, ma una teoria quantitativa, in sostanza, non esisteva. In questo lavoro venne creato l'apparato matematico che serví di base per successivi lavori in questo campo. Landau stesso continuò l'elaborazione della teoria degli sciami in altri due articoli: sulla distribuzione angolare delle particelle*[43] *e sugli sciami secondari*[44].

Di un virtuosismo non minore è un altro lavoro di Landau dedicato allo sviluppo dell'idea di Fermi sul carattere statistico della produzione multipla delle particelle nelle collisioni[74]**). Questo lavoro è un altro esempio brillante dell'unità metodologica della fisica teorica, quando alla soluzione del problema vennero applicati metodi appartenenti a un campo del tutto diverso. Landau mostrò che il processo della produzione multipla passa attraverso lo stadio del processo di espansione della « nube » le cui dimensioni sono grandi rispetto al cammino percorso all'interno di essa dalle particelle; questo stadio deve essere descritto corrispondentemente mediante equazioni dell'idrodinamica relativistica. La soluzione di queste equazioni richiese alcuni artifizi e un'analisi approfondita. Landau riconobbe in seguito che questo lavoro gli costò una fatica maggiore di qualsiasi altro.*

Landau rispondeva sempre con prontezza alle richieste e ai bisogni degli sperimentatori. In particolare, tale è l'origine del suo lavoro[56] *in cui fu determinata la distribuzione delle perdite di energia per ionizzazione daparte delle particelle veloci nell'attraversamento della materia (prima esisteva soltanto la teoria delle perdite medie di energia).*

Passando ai lavori di Landau dedicati alla fisica macroscopica. iniziamo da alcuni articoli che rappresentano il suo contributo alla fisica del magnetismo.

In accordo con la meccanica classica e la statistica, il cambiamento del carattere del moto degli elettroni liberi in un campo magnetico non può generare nuove proprietà magnetiche del sistema. Landau fu il primo a mettere in luce il carattere del moto nel campo magnetico nel caso quantistico e ad avvertire che la quantizzazione muta interamente la situazione causando il diamagnetismo del gas di elettroni

---

*) Un esame piú particolareggiato con ulteriori dettagli di questo lavoro è dato nel resoconto[88] (scritto insieme con S. Z. Belenkij).

liberi (questo fenomeno è chiamato ora « diamagnetismo di Landau »)[4]. *Nello stesso lavoro egli predisse qualitativamente la dipendenza periodica della suscettività magnetica dalla grandezza del campo magnetico a valori grandi. A quell'epoca (1930) questo fenomeno non era stato ancora osservato da nessuno; esso verrà scoperto piú tardi sperimentalmente (effetto De Haas - Van Alphen). Landau teorizzò quantitativamente questo effetto in uno dei suoi lavori successivi*[38].

Un breve articolo pubblicato nel 1933[12] *va oltre i limiti del problema posto nel suo titolo: sulla possibile spiegazione della dipendenza dal campo della suscettività magnetica di un determinato gruppo di sostanze a basse temperature. Vi fu introdotto per la prima volta il concetto di antiferromagnetismo (anche se questo termine non fu applicato) come fase particolare della magnetizzazione che si differenzia per la sua simmetria dalla fase paramagnetica; conformemente a ciò, la transizione fra i due deve avvenire in un punto ben determinato*). In questo lavoro venne considerato concretamente il modello di un antiferromagnetico stratificato con forte legame ferromagnetico in ogni strato e legame antiferromagnetico debole fra gli strati; per questo caso venne eseguita una analisi quantitativa e furono determinate le caratteristiche delle proprietà magnetiche della sostanza che si trova vicino al punto di transizione. Il metodo applicato da Landau si fondava sulle idee che furono sviluppate in seguito nella sua teoria generale delle transizioni di fase di seconda specie.*

C'è ancora un lavoro relativo alla teoria del ferromagnetismo. Già nel 1907 P. Weiss aveva avanzato un'ipotesi sulla struttura dei ferromagnetici come formati da regioni elementari e magnetizzate spontaneamente nelle diverse direzioni (« domini magnetici » secondo la terminologia moderna). Non esisteva ancora, però, una teoria quantitativa di questa struttura. Nel lavoro di Landau (in collaborazione con E. M. Lifšic)[18] *eseguito nel 1936 fu provato che tale teoria deve essere basata su considerazioni termodinamiche e vennero determinate per un caso tipico la forma e le dimensioni dei domini. Nello stesso lavoro fu dedotta l'equazione macroscopica del moto del vettore magnetizzazione dei domini. Questa equazione permise poi di sviluppare le basi della teoria della dispersione della permeabilità magnetica dei ferromagnetici in un campo magnetico variabile; in particolare, fu predetto un fenomeno noto oggi sotto il nome di risonanza ferromagnetica.*

In un breve articolo[10] *pubblicato nel 1933 fu avanzata un'idea sulla possibilità di « autolocalizzazione » di un elettrone nel reticolo*

---

*) Circa un anno prima in un lavoro di Neél (sconosciuto a Landau) era stata predetta la possibilità dell'esistenza di sostanze formate, dal punto di vista magnetico, da due sottoreticoli con momenti opposti. Tuttavia, Neél non supponeva che si trattasse di uno stato particolare della materia, credendo semplicemente che il paramagnetico con integrale di scambio positivo assumesse a poco a poco, per effetto delle basse temperature, una struttura formata da piú sottoreticoli magnetici.

cristallino in una buca di potenziale, generatasi in forza della sua azione polarizzatrice. Questa idea costituì poi la base della cosiddetta teoria polaronica della conduttività dei cristalli ionici. Landau tornò ancora una volta su queste questioni in un lavoro successivo (in collaborazione con S. I. Pekar)[67] *dedicato alla deduzione delle equazioni del moto del polarone in un campo esterno.*

In un altro breve articolo di Landau (scritto insieme con G. Placzek) furono ottenuti risultati circa la struttura della riga della diffusione di Rayleigh in liquidi o in gas[14]*. Ancora all'inizio degli anni '20 Brillouin e Mandelstam dimostrarono che grazie alla diffusione da oscillazioni acustiche questa riga deve scindersi in doppietto. Landau e Placzek richiamarono l'attenzione sulla necessità dell'esistenza anche della diffusione da fluttuazioni dell'entropia non accompagnata da alcuna variazione di frequenza; come risultato, in luogo del doppietto, si deve osservare un tripletto*).*

Alla fisica del plasma si riferiscono due lavori di Landau. In uno di essi fu dedotta originariamente l'equazione cinetica tenendo conto dell'interazione coulombiana fra le particelle[24]*; la lenta decrescenza di queste forze rendeva inapplicabili, nel caso considerato, i metodi usuali per la deduzione delle equazioni cinetiche. In un altro lavoro, dedicato alle oscillazioni del plasma*[61]*, egli mostrò che le oscillazioni ad alta frequenza si smorzano persino nelle condizioni in cui si possono trascurare gli urti tra le particelle nel plasma (« smorzamento di Landau »)**).*

Il lavoro su uno dei volumi del Corso di fisica teorica indusse Landau a studiare profondamente l'idrodinamica. Come sempre, egli si mise a ripensare e riprodurre autonomamente tutte le affermazioni e i risultati fondamentali di questa scienza. La sua visione nuova e originale portò, in particolare, a un nuovo trattamento del problema dell'origine della turbolenza; egli mise in luce le proprietà fondamentali del processo di evoluzione graduale della non stazionarietà all'aumentare del numero di Reynolds, quando il moto laminare perde la sua stabilità, e predisse diverse varianti possibili[52]*. Indagando le proprietà qualitative dell'aerodinamicità dei solidi, Landau ottenne un risultato inaspettato: lontano da un solido deve esistere non una sola onda, come si credeva di solito, ma due onde d'urto che seguono l'una dietro l'altra*[60]*. Persino in una questione « classica », come la teoria delle linee di corrente dei liquidi egli riuscí a trovare una nuova, finora inosservata, soluzione esatta per*

---

*) L'esposizione particolareggiata delle conclusioni e dei risultati di questo lavoro non è stata pubblicata sotto forma di un articolo. Essa è data, in parte, nel libro « Elektrodinamika sploshnych sred » (*Elettrodinamica dei mezzi continui*), § 96, Mosca, Fizmatghiz, 1959.

**) È interessante notare che questo lavoro è nato come reazione di Landau alla « filologia » propria, a suo avviso, dei lavori precedenti su questo tema (per esempio, la sostituzione ingiustificata degli integrali divergenti con i loro valori principali). Per dimostrare di aver ragione, egli si mise a lavorare su questo problema.

una linea « annegata » con simmetria assiale di un liquido viscoso incompressibile[51].

Un posto eminente nella produzione scientifica di Landau — sia per l'importanza diretta che per il numero di possibili applicazioni — spetta alla teoria delle transizioni di fase di seconda specie[29]*; il primo abbozzo delle idee basilari di questa teoria era già contenuto in una breve pubblicazione*[17]**). Il concetto di transizioni di fase di diversi ordini fu introdotto originariamente da Ehrenfest in modo puramente formale: a seconda dell'ordine delle derivate termodinamiche che avrebbero potuto subire uno sbalzo nel punto di transizione. Erano però rimaste aperte le questioni su quali di queste transizioni potessero effettivamente esistere e in che cosa consistesse la loro natura fisica; nella letteratura si avanzavano in merito ipotesi troppo vaghe e infondate. Landau mise in rilievo il profondo legame fra la possibilità dell'esistenza di una transizione di fase continua (nel senso di variazione dello stato del solido) e la variazione a sbalzi di una qualsiasi proprietà di simmetria del solido nel punto di transizione. Egli mostrò anche che nel punto di tale transizione non è possibile una qualsiasi variazione della simmetria e propose un metodo che permette di determinare forme possibili di variazione della simmetria. La teoria quantitativa sviluppata da Landau era fondata sull'ipotesi della regolarità della scomposizione delle grandezze termodinamiche nella prossimità del punto di transizione. Oggi è chiaro che tale teoria, che non tiene conto di possibili singolarità di queste grandezze nel punto di transizione, non riflette tutte le proprietà della transizione di fase. Landau si interessò molto della questione inerente al carattere di questa singolarità e negli ultimi anni lavorò parecchio su questo difficile problema, ma non fece in tempo ad ottenere dei risultati.*

Nello spirito della teoria delle transizioni di fase è costruita anche la teoria fenomenologica della superconduttività[73] *creata da Landau (in collaborazione con V. L. Ghinzburg) nel 1950; piú tardi, in particolare, essa servì da base per la teoria delle leghe superconduttrici. In questa teoria intervengono quantità e parametri il cui significato non era del tutto chiaro al momento della sua comparsa; esso fu chiarito soltanto dopo la creazione nel 1957 della teoria microscopica della superconduttività che permise di dare un'argomentazione rigorosa delle equazioni di Ghinzburg - Landau e di determinarne il campo di applicabilità. A questo proposito è assai istruttiva la storia (raccontata da V. L. Ghinzburg di un'affermazione sbagliata fatta in un articolo scritto in comune. L'equazione fondamentale della teoria, che determina la funzione d'onda efficace Ψ degli elettroni superconduttori, contiene il*

---

*) A Landau appartiene l'applicazione di questa teoria alla diffusione dei raggi Röntgen da parte di cristalli[32] e (in collaborazione con I. M. Khalatnikov) all'assorbimento del suono[62] nell'intorno del punto di transizione

potenziale vettore A *in un termine del tipo*

$$\frac{1}{2m}\left(-i\hbar\nabla-\frac{e^*}{c}\mathbf{A}\right)\Psi,$$

analogo al termine corrispondente dell'equazione di Schrödinger. Poteva sembrare che nella teoria fenomenologica il parametro e* *dovesse rappresentare una certa carica efficace, non necessariamente legata con la carica* e *dell'elettrone libero. Ma Landau respinse questa idea mostrando che la carica efficace non è universale e dovrebbe dipendere da diversi fattori (pressione, materiale del modello, ecc.); allora in un modello eterogeneo* e* *sarebbe una funzione delle coordinate, ciò che violerebbe la gauge-invarianza della teoria. Nell'articolo fu scritto perciò che la carica* e* *« ...non può essere considerata per alcuna ragione diversa dalla carica dell'elettrone ». Sappiamo ora che in realtà* e* *coincide con la carica della coppia di elettroni di Cooper, si ha cioè* e* = 2e, *e non* e* = e. *Questo valore della carica poteva essere previsto, beninteso, soltanto sulla base dell'idea dell'accoppiamento di elettroni sulla quale è fondata la teoria microscopica della superconduttività. Ma il valore* 2e *è altrettanto universale che* e, *cosicché l'argomentazione di Landau era di per sé giusta.*

Un altro contributo di Landau nella fisica della superconduttività consiste nella spiegazione della natura del cosiddetto stato intermedio. Il concetto di stato intermedio fu introdotto originariamente da R. Peierls e F. London (1936) per la descrizione del fenomeno osservato della gradualità della transizione alla superconduttività in un campo magnetico. Ma la loro teoria aveva un carattere fenomenologico, mentre la questione della natura dello stato intermedio rimaneva aperta. Landau mostrò che questo stato non rappresenta qualche cosa di nuovo e che in realtà il superconduttore in esso è formato da una serie di strati successivi fini in fase normale e in fase superconduttrice. Nel 1937[30] *Landau esaminò un modello in cui questi strati appaiono alla superficie; egli riuscí con un elegante artifizio a determinare completamente la forma e le dimensioni degli strati di tale modello*). Nel 1938 egli propose una nuova variante della teoria secondo la quale gli strati apparsi alla superficie subiscono una ramificazione multipla; tale struttura deve presentare un vantaggio maggiore dal punto di vista termodinamico, se le dimensioni del modello sono sufficientemente grandi**).*

Ma il contributo maggiore che la fisica deve a Landau è la sua teoria dei liquidi quantistici. L'importanza di questo nuovo settore cresce attualmente sempre di piú; è indubbio che il suo sviluppo negli ultimi decenni ha rivoluzionato anche altri settori della fisica: la fisica dei solidi e persino la fisica del nucleo.

---

*) Landau scrisse in proposito che « risulta meravigliosamente possibile la determinazione esatta della forma degli strati »[30].

**) L'esposizione particolareggiata di questo lavoro è stata pubblicata nel 1947[49].

La teoria della superfluidità fu creata da Landau nel 1940 - 1941, subito dopo la scoperta, fatta nel 1937 da P. L. Kapitza, di questa proprietà fondamentale dell'elio II. Prima di questa scoperta le premesse per la spiegazione della natura fisica della transizione di fase osservata nell'elio liquido di fatto non esistevano, e non c'è da meravigliarsi che si avanzassero in merito delle idee che oggi potrebbero sembrare persino ingenue). È da notare che sin dall'inizio la teoria dell'elio II fu costruita completa: già il primo articolo classico di Landau*[46] *conteneva quasi tutte le idee basilari sia della teoria microscopica dell'elio II che della teoria macroscopica fondata sulla base della prima, ossia della termodinamica e della fluidodinamica di questo liquido (a quest'ultima è dedicato anche l'articolo*[53]*).*

La teoria di Landau si basa sul concetto di quasi-particelle (eccitazioni elementari) che costituiscono lo spettro energetico dell'elio II. Landau fu il primo a porre la questione dello spettro energetico di un corpo macroscopico in forma cosí generica e fu proprio lui a determinare il carattere dello spettro per un liquido quantistico del tipo dell'elio liquido (isotopo He^4*) o, come si dice ora, del tipo di Bose. In un lavoro del 1941 Landau suppose lo spettro delle eccitazioni elementari formato da due parti: fononi con dipendenza lineare dell'energia* ε *dall'impulso* $\mathbf{p}$ *e « rotoni » con dipendenza quadratica separata dallo stato fondamentale da una fessura energetica. Piú tardi Landau comprese che tale forma dello spettro era insoddisfacente (in quanto instabile) dal punto di vista teorico e un'analisi particolareggiata dei dati sperimentali completi e esatti comparsi in quel periodo lo indusse, nel 1946, a stabilire il famoso spettro formato da un solo ramo in cui ai « rotoni » corrisponde un minimo sulla curva* $\varepsilon(\mathbf{p})$*. Le rappresentazioni macroscopiche della teoria della superfluidità sono universalmente note. Nella loro sostanza, esse si riducono alla rappresentazione di due movimenti che avvengono contemporaneamente nei liquidi — « normale » e « superfluido » — e che si possono considerare, per maggiore evidenza, come movimenti di due « componenti del liquido »**. Il movimento normale è accompagnato, come nei liquidi ordinari, dall'attrito interno. La determinazione del coefficiente di viscosità rappresenta un problema cinetico che richiede di analizzare il processo di formazione dell'equilibrio nel « gas di quasi-particelle »; i fondamenti della teoria della viscosità del'elio II furono sviluppati da Landau (in collaborazione con*

*) Cosí, Landau stesso nel suo lavoro sulla teoria delle transizioni di fase[29] espresse l'ipotesi che l'elio II fosse un cristallo liquido, pur sottolineando quanto fosse dubbia tale rappresentazione.

**) Alcune idee della descrizione macroscopica « bicomponente » dell'elio liquido (anche senza un'interpretazione fisica chiara) furono introdotte, indipendentemente da Landau, da L. Tisza. Il suo articolo particolareggiato, pubblicato in Francia nel 1940, fu portato nell'URSS, essendo in tempo di guerra, soltanto nel 1943, mentre un suo breve articolo apparso nel 1938 negli « Atti dell'Accademia di Parigi » passò, purtroppo, inosservato. La critica della parte quantitativa della teoria di Tisza fu data da Landau nell'articolo[66].

I. M. Khalatnikov) nel 1949[69,70]*. Infine, in un altro lavoro (scritto insieme con I. J. Pomeranciuk) fu considerata la questione del comportamento di atomi ridondanti nell'elio*[64]*; in particolare, fu dimostrato che ogni atomo di questo genere fa parte della « componente normale » del liquido, indipendentemente dal fatto che l'additivo abbia di per sé la proprietà di superfluidità, contrariamente all'ipotesi errata avanzata allora nella letteratura.*

L'isotopo liquido He^3 *è un liquido quantistico di altro tipo, detto oggi tipo di Fermi. Anche se le sue proprietà non sono cosí notevoli come quelle del liquido* He^4*, dal punto di vista teorico esse presentano un interesse non minore. La teoria di tali liquidi fu creata ed esposta da Landau in tre articoli pubblicati nel 1956 - 1958. Nei primi due*[90,91] *venne determinato il carattere dello spettro energetico del liquido di Fermi, furono esaminate le sue proprietà termodinamiche e fu dedotta l'equazione cinetica per i processi di rilassamento. Lo studio dell'equazione cinetica permise a Landau di predire un tipo particolare di processo oscillatorio in* He^3 *liquido in prossimità dello zero assoluto, chiamato da egli suono nullo. Nel terzo articolo*[95]*, all'equazione cinetica, la cui deduzione conteneva prima certe ipotesi intuitive, fu data un'argomentazione microscopica rigorosa.*

Nel concludere questa breve rassegna, che è lontana dall'essere completa, non mi resta che ripetere che è superfluo sottolineare per i fisici quanto sia grande il contributo di Lev Davidovič Landau nella fisica teorica. La sua opera ha un valore imperituro e resterà sempre nella scienza.

E. Lifšic

Istituto di problemi fisici dell'Accademia
delle Scienze dell'URSS

Capitolo I

EQUAZIONI DEL MOTO

§ 1. *Coordinate generalizzate*

Uno dei concetti fondamentali della Meccanica è il concetto di *punto materiale*[1]). Con punto materiale si intende un corpo le cui dimensioni si possono trascurare nella descrizione del suo moto. È ben chiaro che questa possibilità dipende dalle condizioni concrete di questo o di quell'altro problema. Per esempio, i pianeti possono esser considerati punti materiali quando si studia la loro rivoluzione intorno al Sole, ma, naturalmente, non quando si considera la loro rotazione.

La posizione di un punto materiale nello spazio è determinata dal suo raggio vettore $\mathbf{r}$ le cui componenti coincidono con le sue coordinate cartesiane x, y, z. La derivata di $\mathbf{r}$ rispetto al tempo t,

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$$

si chiama velocità e la derivata seconda, $\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}$, accelerazione del punto. Seguendo l'uso comune, indicheremo sempre la derivazione rispetto al tempo con un punto sopra la lettera: $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$.

Per determinare la posizione nello spazio di un sistema di N punti materiali, è necessario dare N raggi vettori, cioé $3N$ coordinate. In generale, il numero di grandezze indipendenti che si debbono dare per determinare univocamente la posizione di un sistema, si chiama numero di *gradi di libertà* del sistema; nel presente caso, questo numero è uguale a $3N$. Queste grandezze non sono necessariamente le coordinate cartesiane del punto; può risultare piú comoda la scelta di un altro sistema di coordinate, il che dipende dalle condizioni del problema considerato. s grandezze qualsiasi $q_1, q_2, \ldots, q_s$, che caratterizzano completamente la posizione di un sistema (con s gradi di libertà), si chiamano *coordinate generalizzate*, e le derivate $\dot{q}_i$, *velocità generalizzate*.

La conoscenza delle sole coordinate generalizzate non è sufficiente per determinare lo « stato meccanico » di un sistema ad un istante dato, non permette cioè di prevedere la posizione del sistema negli istanti successivi. Se vengono dati infatti solo valori delle coordina-

[1]) Spesso useremo il termine « particella » invece di « punto materiale ».

te, il sistema può avere velocità arbitrarie, e a seconda dei differenti valori di queste, la posizione del sistema in un istante successivo (dopo un intervallo infinitesimo dt) può variare.

Se, invece, tutte le coordinate e le velocità sono date nello stesso istante, allora, come dimostra l'esperienza, è possibile determinare interamente lo stato del sistema e, in linea di massima, prevederne il moto futuro. Dal punto di vista matematico, ciò significa, che dando in un certo istante tutte le coordinate q e le velocità $\dot{q}$, si definisce univocamente anche il valore delle accelerazioni $\ddot{q}$ in questo istante[1]).

Le relazioni che legano le accelerazioni con le coordinate e le velocità si chiamano *equazioni del moto*. Rispetto alle funzioni $q(t)$ esse sono equazioni differenziali del secondo ordine la cui integrazione permette di determinare, in linea di massima, queste funzioni, cioè le traiettorie del sistema meccanico.

§ 2. *Il principio di minima azione*

Una formulazione piú generale della legge del moto di sistemi meccanici è data dal *principio di minima azione* (o *principio di Hamilton*). Secondo questo principio, ogni sistema meccanico è caratterizzato da una determinata funzione

$$L(q_1, q_2, \ldots, q_s, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots \dot{q}_s, t)$$

o, brevemente, $L(q, \dot{q}, t)$; inoltre, il moto del sistema soddisfa la seguente condizione.

Supponiamo che negli istanti $t = t_1$ e $t = t_2$ il sistema occupi posizioni determinate, caratterizzate dai due insiemi di valori delle coordinate $q^{(1)}$ e $q^{(2)}$. Allora, entro queste posizioni, il sistema si muove in modo tale che l'integrale

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t)\, dt \tag{2,1}$$

abbia il piú piccolo valore possibile[2]). La funzione L è detta *funzione di Lagrange* del dato sistema, e l'integrale (2,1), *azione*.

La funzione di Lagrange contiene solamente q e $\dot{q}$, ma non derivate di ordine superiore $\ddot{q}$, $\dddot{q}$, . . . Ciò è dovuto al fatto suindicato che

[1]) Per semplificazione, intenderemo spesso con q l'insieme di tutte le coordinate $q_1, q_2, \ldots, q_s$ (ed analogamente con $\dot{q}$ l'insieme di tutte le velocità).

[2]) È necessario notare, però, che il principio di minima azione cosí formulato non sempre è valido per la traiettoria del moto in totale, bensí per ogni porzione sufficientemente piccola di quest'ultima; per tutta la traiettoria, l'integrale (2,1) può avere soltanto un valore estremo che non sarà necessariamente minimo. Questa circostanza non è di importanza sostanziale nella deduzione delle equazioni del moto, in cui si fa uso soltanto della condizione di estremo.

lo stato meccanico di un sistema è interamente definito dalle sue coordinate e dalle sue velocità.

Stabiliamo ora le equazioni differenziali che permettono di determinare il minimo dell'integrale (2,1). Per semplicità, ammettiamo anzitutto che il sistema abbia un solo grado di libertà, il che vuol dire che bisogna definire una sola funzione $q(t)$.

Supponiamo che $q = q(t)$ sia precisamente la funzione per la quale S ha un minimo. Ciò significa che S cresce sostituendo $q(t)$ con una funzione qualsiasi del tipo

$$q(t) + \delta q(t), \tag{2,2}$$

dove $\delta q(t)$ è una funzione piccola in tutto l'intervallo di tempo da t_1 a t_2 ($\delta q(t)$ si chiama *variazione* della funzione $q(t)$). Poiché negli istanti $t = t_1$ e $t = t_2$ tutte le funzioni del tipo (2,2) debbono assumere rispettivamente i valori $q^{(1)}$ e $q^{(2)}$, si avrà:

$$\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0. \tag{2,3}$$

La variazione di S nel sostituire q con $q + \delta q$ è data dalla differenza

$$\int_{t_1}^{t_2} L(q+\delta q, \dot{q}+\delta\dot{q}, t)\,dt - \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t)\,dt.$$

Lo sviluppo in serie di questa differenza secondo le potenze di δq e $\delta\dot{q}$ (nell'espressione integranda) comincia dai termini del primo ordine. La condizione necessaria perché S abbia un minimo[1]) è che si annulli l'insieme di questi termini, detto variazione prima (o, semplicemente, variazione) dell'integrale. Dunque, il principio di minima azione può essere scritto nella forma seguente:

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t)\,dt = 0, \tag{2,4}$$

o, eseguendo la variazione:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q}\delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta\dot{q}\right) dt = 0.$$

Osserviamo che $\delta\dot{q} = \frac{d}{dt}\delta q$; integrando per parti il secondo termine otteniamo:

$$\delta S = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta q \Big|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)\delta q\,dt = 0. \tag{2,5}$$

---

[1]) In generale, un valore di estremo.

Il primo termine di questa espressione sparisce, in virtú delle condizioni (2,3). Resta l'integrale che deve essere uguale a zero per valori arbitrari di δq. Ciò è possibile soltanto nel caso in cui l'espressione integranda è identicamente nulla. Otteniamo cosí l'equazione

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0.$$

Per un sistema con piú gradi di libertà, nel principio di minima azione si debbono variare indipendentemente s funzioni diverse $q_i(t)$. È evidente che si ottengono allora s equazioni del tipo

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, s) \tag{2.6}$$

Queste sono le equazioni differenziali cercate, chiamate in meccanica *equazioni di Lagrange*[1]). Se è nota la funzione di Lagrange di un dato sistema meccanico, allora le equazioni (2,6) stabiliscono un legame tra le accelerazioni, le velocità e le coordinate, cioè rappresentano le equazioni del moto del sistema.

Dal punto di vista matematico, le equazioni (2,6) costituiscono un sistema di s equazioni differenziali del secondo ordine con s funzioni incognite $q_i(t)$. La soluzione generale di un tale sistema contiene $2s$ costanti arbitrarie. Per determinarle e, di conseguenza, per definire completamente il moto di un sistema meccanico, è necessario conoscere le condizioni iniziali che caratterizzano lo stato meccanico del sistema in un dato istante, per esempio, i valori iniziali di tutte le coordinate e le velocità.

Sia un sistema meccanico composto di due parti A e B, ciascuna delle quali, se fosse isolata, avrebbe per funzione di Lagrange, rispettivamente, le funzioni L_A ed L_B. Se queste parti vengono allontanate l'una dall'altra per una distanza sufficientemente grande tanto da rendere trascurabile la loro interazione, la funzione di Lagrange dell'intero sistema tende a

$$\lim L = L_A + L_B. \tag{2,7}$$

Questa proprietà di additività della funzione di Lagrange esprime il fatto che le equazioni del moto di ciascuna delle parti componenti non interagenti non possono contenere grandezze riguardanti le altre parti del sistema.

È evidente che la moltiplicazione della funzione di Lagrange per una costante arbitraria non produce alcun effetto sulle equazioni del moto. Di qui sembrerebbe derivare una sostanziale indeterminatezza: le funzioni di Lagrange di differenti sistemi meccanici isolati

[1]) Nel calcolo variazionale, che affronta il problema formale di determinazione degli estremi di integrali del tipo (2,1), sono chiamate equazioni di Eulero.

si potrebbero moltiplicare per costanti arbitrarie diverse. La proprietà di additività elimina questa indeterminatezza: essa ammette soltanto la moltiplicazione simultanea delle funzioni di Lagrange di tutti i sistemi per una stessa costante, ciò che corrisponde semplicemente alla naturale arbitrarietà nella scelta delle unità di misura di questa grandezza fisica; di questo riparleremo nel § 4.

È necessario fare ancora un'osservazione di carattere generale. Consideriamo due funzioni $L'(q, \dot{q}, t)$ ed $L(q, \dot{q}, t)$ che differiscono per una derivata totale rispetto al tempo di una funzione delle coordinate e del tempo $f(q, t)$:

$$L'(q, \dot{q}, t) = L(q, \dot{q}\, t) + \frac{d}{dt} f(q, t). \tag{2,8}$$

Gli integrali (2,1) valutati con queste due funzioni sono legati dalla relazione

$$S' = \int_{t_1}^{t_2} L'(q, \dot{q}, t)\, dt = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t)\, dt + \int_{t_1}^{t_2} \frac{df}{dt}\, dt =$$
$$= S + f(q^{(2)}, t_2) - f(q^{(1)}, t_1),$$

cioè differiscono per un termine supplementare che si annulla quando varia l'azione. Dunque, la condizione $\delta S' = 0$ coincide con la condizione $\delta S = 0$, e la forma delle equazioni del moto resta immutata.

La funzione di Lagrange è determinata quindi a meno di una derivata totale additiva di una funzione qualsiasi delle coordinate e del tempo.

§ 3. *Il principio di relatività di Galilei*

Lo studio dei fenomeni meccanici richiede che sia scelto *un sistema di riferimento*. Le leggi del moto in sistemi di riferimento differenti hanno in generale forma diversa. Se si prende un sistema di riferimento qualunque, può risultare che le leggi dei fenomeni piú semplici assumano una forma estremamente complicata. Sorge spontaneo il problema della scelta di un sistema di riferimento tale che le leggi della meccanica abbiano la forma piú semplice possibile.

Rispetto ad un sistema di riferimento qualunque, lo spazio è eterogeneo ed anisotropo. Ciò vuol dire che anche se un corpo non interagisce con nessun altro corpo, le sue differenti posizioni nello spazio e le sue differenti orientazioni non sono, però, equivalenti dal punto di vista meccanico. Anche per quanto riguarda il tempo, si può dire che, in generale, esso non è omogeneo, cioè i diversi istanti non

sono equivalenti. La complicazione che queste proprietà dello spazio e del tempo porterebbero nella descrizione dei fenomeni meccanici è evidente. Per esempio, un corpo libero (cioè non sollecitato da azione esterna) non potrebbe perseverare nello stato di quiete: pur essendo nulla la velocità del corpo ad un dato istante, il corpo comincerebbe a muoversi nell'istante successivo in una determinata direzione.

Nonostante questo, si può sempre trovare un sistema di riferimento tale che rispetto ad esso lo spazio sia omogeneo ed isotropo ed il tempo omogeneo. Un sistema con queste caratteristiche si chiama *inerziale*. In particolare, un corpo libero che ad un dato istante si trovi, in questo sistema, in uno stato di quiete vi resterà per un periodo di tempo illimitato.

Possiamo ora trarre qualche conclusione riguardante la forma della funzione di Lagrange per un punto materiale che si muove liberamente in un sistema di riferimento inerziale. L'omogeneità dello spazio e del tempo significa che questa funzione non può contenere in forma esplicita né il raggio vettore $\mathbf{r}$ del punto, né il tempo t, cioè L è una funzione soltanto della velocità $\mathbf{v}$. In virtú dell'isotropia dello spazio, la funzione di Lagrange non può dipendere neanche dalla direzione del vettore $\mathbf{v}$; essa è quindi una funzione del suo valore assoluto, cioè del quadrato $\mathbf{v}^2 = v^2$:

$$L = L\,(v^2). \tag{3,1}$$

Dato che la funzione di Lagrange non dipende da $\mathbf{r}$, abbiamo $\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} = 0$, e le equazioni di Lagrange assumono quindi la forma[1])

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = 0,$$

da cui $\partial L/\partial \mathbf{v}$ = costante. Essendo dato che $\partial L/\partial \mathbf{v}$ è funzione soltanto della velocità, ne segue anche che

$$\mathbf{v} = \text{costante}. \tag{3,2}$$

Arriviamo cosí alla conclusione che, in un sistema di riferimento inerziale, ogni moto libero avviene con velocità costante e in grandezza e in direzione. Questa asserzione costituisce il contenuto della cosiddetta *legge di inerzia*.

Se accanto a un dato sistema inerziale introduciamo un altro sistema, animato da moto rettilineo ed uniforme rispetto al primo, le leggi del moto libero rispetto a questo nuovo sistema saranno le stesse che rispetto al sistema originario: il moto libero sarà ancora un moto a velocità costante.

---

[1]) Per derivata di una grandezza scalare rispetto ad un vettore si intende un vettore le cui componenti sono uguali alle derivate di questa grandezza rispetto alle corrispondenti componenti del vettore.

Tuttavia, l'esperienza mostra non solo che le leggi del moto libero coincidono in questi due sistemi, ma che esse sono meccanicamente del tutto equivalenti sotto tutti gli aspetti. Esiste quindi non uno, ma una molteplicità infinita di sistemi di riferimento, moventisi l'uno rispetto all'altro con moto rettilineo e uniforme. In tutti questi sistemi le proprietà dello spazio e del tempo sono identiche, come pure sono identiche tutte le leggi della meccanica. Questa asserzione costituisce il contenuto del cosiddetto *principio di relatività di Galilei*, uno dei princípi fondamentali della meccanica.

Tutto quanto abbiamo detto mette in evidenza la peculiarità delle proprietà dei sistemi di riferimento inerziali, in forza delle quali l'uso di questi sistemi si impone, di regola, nello studio dei fenomeni meccanici. Nel seguito, dove non si dica esplicitamente il contrario, considereremo esclusivamente sistemi di riferimento inerziali.

La completa equivalenza meccanica di tutta l'infinità di questi sistemi dimostra, al tempo stesso, che non esiste nessun sistema « assoluto » che possa essere preferito agli altri.

Le coordinate $\mathbf{r}$ ed $\mathbf{r}'$ di uno stesso punto date in due sistemi di riferimento differenti K e K', dei quali il secondo si muove rispetto al primo con velocità $\mathbf{V}$, sono legate dalla relazione

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{V}t, \tag{3,3}$$

in cui si sottintende che il trascorrere del tempo in ambedue i sistemi di riferimento avviene in modo identico, cioè

$$t = t'. \tag{3,4}$$

L'ipotesi di un tempo assoluto sta alla base stessa dei concetti della meccanica classica[1]).

Le formule (3,3) e (3,4) sono dette *trasformazioni di Galileo*. Il principio di relatività galileiano può essere formulato come requisito di invarianza delle equazioni del moto della meccanica rispetto a queste trasformazioni.

§ 4. *Funzione di Lagrange di un punto materiale libero*

Prima di determinare la forma della funzione di Lagrange, consideriamo anzitutto un caso elementare, studiando cioè il moto libero di un punto materiale in un sistema di riferimento inerziale. La funzione di Lagrange, come abbiamo già visto, può dipendere in questo caso soltanto dal quadrato del vettore velocità. Per esplicitare questa dipendenza, ci serviremo del principio di relatività di Galilei. Se un sistema di riferimento K si muove rispetto ad un

[1]) Questa ipotesi non è valida in meccanica relativistica.

altro sistema inerziale K' con velocità infinitesima ε, si ha $\mathbf{v}' = \mathbf{v} + \varepsilon$. Dovendo restare identica la forma delle equazioni del moto in tutti i sistemi di riferimento, la funzione di Lagrange $L(v^2)$ assume, sotto tale trasformazione, la forma L', la quale, pur essendo differente da $L(v^2)$, differisce da essa soltanto per una derivata totale di una funzione delle coordinate e del tempo (vedi fine del § 2).

Abbiamo:

$$L' = L(v'^2) = L(v^2 + 2\mathbf{v}\varepsilon + \varepsilon^2).$$

Sviluppando questa espressione in serie secondo le potenze di ε e trascurando gli infinitesimi d'ordine superiore, otteniamo:

$$L(v'^2) = L(v^2) + \frac{\partial L}{\partial v^2} 2\mathbf{v}\varepsilon.$$

Il secondo termine del secondo membro di quest'uguaglianza è una derivata totale rispetto al tempo soltanto nel caso in cui esso dipenda linearmente dalla velocità $\mathbf{v}$. Per questo $\frac{\partial L}{\partial v^2}$ non dipende dalla velocità; in altri termini, la funzione di Lagrange nel caso considerato è proporzionale al quadrato della velocità:

$$L = av^2.$$

Poiché la funzione di Lagrange in questa forma soddisfa il principio di relatività galileiano in una trasformazione infinitesima della velocità, discende immediatamente che la funzione di Lagrange è invariante anche per una velocità finita $\mathbf{V}$ del sistema inerziale K rispetto al sistema K'. Infatti,

$$L' = av'^2 = a(\mathbf{v} + \mathbf{V})^2 = av^2 + 2a\mathbf{v}\mathbf{V} + aV^2$$

oppure

$$L' = L + \frac{d}{dt}(2a\mathbf{r}\mathbf{V} + aV^2 t).$$

Il secondo termine è una derivata totale e, di conseguenza, può essere omesso.

La costante a viene comunemente indicata con $m/2$. La funzione di Lagrange per un punto materiale in moto libero si scrive in definitiva:

$$L = \frac{mv^2}{2}. \tag{4,1}$$

La grandezza m si chiama *massa* del punto materiale. In virtú della proprietà additiva della funzione di Lagrange, si ha per un sistema di punti non interagenti[1]):

$$L = \sum_a \frac{m_a v_a^2}{2}. \tag{4,2}$$

[1]) Per numerare le particelle, useremo quale indice le prime lettere del l'alfabeto, e per numerare le coordinate, le lettere i, k, l...

Bisogna sottolineare che la definizione data della massa acquista un senso reale esclusivamente grazie a questa proprietà additiva. Come abbiamo già notato nel § 2, si può sempre moltiplicare la funzione di Lagrange per una costante qualsiasi, il che non influisce sulle equazioni del moto. Per la funzione (4,2), questa moltiplicazione implica un cambiamento dell'unità di misura della massa; ma i rapporti delle masse di diverse particelle che sono gli unici ad avere un senso fisico reale, restano invariati in questa trasformazione.

È facile vedere che la massa non può essere negativa. Infatti, secondo il principio di minima azione, quando un punto materiale si muove da un punto 1 ad un punto 2 dello spazio, l'integrale

$$S = \int_1^2 \frac{mv^2}{2}\, dt$$

assume un valore minimo. Se la massa fosse negativa, allora per una traiettoria lungo la quale la particella cominci ad allontanarsi rapidamente dal punto 1 per poi avvicinarsi rapidamente al punto 2, l'integrale d'azione prenderebbe valori negativi arbitrariamente grandi in assoluto, cioè non avrebbe minimo[1]).

È utile notare che

$$v^2 = \left(\frac{dl}{dt}\right)^2 = \frac{dl^2}{dt^2}. \tag{4,3}$$

Per stabilire la funzione di Lagrange, è sufficiente quindi trovare il quadrato della lunghezza dell'elemento d'arco dl nel sistema di coordinate corrispondente.

In coordinate cartesiane, per esempio, si ha $dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$, da cui

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2). \tag{4,4}$$

In coordinate cilindriche si ha $dl^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2 + dz^2$, da cui

$$L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2). \tag{4,5}$$

In coordinate sferiche si ha $dl^2 = dr^2 + r^2\, d\theta^2 + r^2\theta \operatorname{sen}^2 d\varphi^2$, da cui

$$L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2 \operatorname{sen}^2\theta\dot{\varphi}^2). \tag{4,6}$$

---

[1]) La notazione alla pag. 28 non è in contraddizione con questa conclusione, perché per $m < 0$ l'integrale non potrebbe avere un minimo per alcuna porzione della traiettoria per quanto piccola fosse.

§ 5. *Funzione di Lagrange di un sistema di punti materiali*

Consideriamo ora un sistema di punti materiali interagenti fra loro ma isolati dall'esterno; un tale sistema è detto *isolato*. Risulta che si può descrivere l'interazione dei punti materiali del sistema aggiungendo alla funzione di Lagrange (4,2), valida per i punti materiali liberi, una funzione (dipendente dal carattere dell'interazione)[1]) delle coordinate. Indichiamo questa funzione con $-U$ e scriviamo:

$$L = \sum_a \frac{m_a v_a^2}{2} - U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots) \tag{5,1}$$

dove $\mathbf{r}_a$ è il raggio vettore dell'a-esimo punto. Questa è la forma generale della funzione di Lagrange di un sistema isolato.

La somma

$$T = \sum_a \frac{m_a v_a^2}{2}$$

si chiama *energia cinetica*, e la funzione U, *energia potenziale* del sistema. Il significato di questi termini verrà chiarito nel § 6.

Il fatto, che l'energia potenziale dipenda soltanto dalla distribuzione di tutti i punti materiali in un medesimo istante di tempo, significa che un cambiamento della posizione di un punto si ripercuote istantaneamente su tutti gli altri; si può dire che l'interazione « si propaga » istantaneamente. Questo carattere è inevitabile in meccanica classica; ciò deriva direttamente dai postulati fondamentali di quest'ultima, e cioè: tempo assoluto e principio di relatività di Galilei. Se l'interazione si propagasse non istantaneamente, bensí con una velocità finita, quest'ultima varierebbe nei differenti sistemi di riferimento (che si muovono l'uno rispetto all'altro); infatti, l'esistenza del tempo assoluto comporta automaticamente che la regola comune di composizione delle velocità è applicabile in tutti i fenomeni. Ma in questo caso le leggi del moto di corpi interagenti sarebbero diverse nei diversi sistemi di riferimento (inerziali), cosa che sarebbe in contraddizione con il principio di relatività.

Nel § 3 abbiamo parlato soltanto dell'omogeneità del tempo. La forma (5,1) della funzione di Lagrange mostra che il tempo è non soltanto omogeneo, ma anche isotropo, cioè le sue proprietà sono identiche in ambedue le direzioni. Infatti, la sostituzione di t con $-t$ lascia invariata la funzione di Lagrange e, di conseguenza, le equazioni del moto. In altri termini, se in un sistema è possibile un qual-

---

[1]) Questa affermazione concerne la meccanica classica, non relativistica, che è oggetto del presente volume.

siasi moto, sarà sempre possibile, anche il moto inverso, un moto tale cioè che il sistema passi nuovamente per gli stessi stati ma nell'ordine inverso. In questo senso, tutti i moti regolati dalle leggi della meccanica classica sono reversibili.

Conoscendo la funzione di Lagrange, possiamo scrivere le equazioni del moto

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_a}=\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_a}. \tag{5,2}$$

Riportando la (5,1) nella (5,2), otteniamo:

$$m_a\frac{d\mathbf{v}_a}{dt}=-\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_a}. \tag{5,3}$$

Le equazioni del moto in questa forma si chiamano *equazioni di Newton*. Esse costituiscono la base della meccanica di un sistema di particelle interagenti. Il vettore

$$\mathbf{F}_a=-\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_a} \tag{5,4}$$

del secondo membro delle equazioni (5,3) è detto *forza* agente sull'a-esimo punto. Come l'energia potenziale U, questa forza dipende soltanto dalle coordinate di tutte le particelle e non dalle loro velocità. Dalle equazioni (5,3) risulta quindi che i vettori accelerazione delle particelle sono funzioni delle sole coordinate.

L'energia potenziale è una grandezza definita a meno di una costante additiva arbitraria; aggiungere una qualsiasi costante non cambierebbe le equazioni del moto (è questo un caso particolare della non univocità della funzione di Lagrange cui abbiamo accennato alla fine del § 2). Il modo piú naturale e comunemente adottato per la scelta di questa costante consiste nel fare sí che l'energia potenziale tenda a zero al crescere della distanza tra le particelle.

Se per la descrizione di un moto si ricorre non alle coordinate cartesiane ma a delle coordinate generalizzate arbitrarie q_i, allora, per ottenere la funzione di Lagrange, si devono effettuare le seguenti trasformazioni:

$$x_a=f_a(q_1, q_2, \ldots, q_s),\quad \dot{x}_a=\sum_k \frac{\partial f_a}{\partial q_k}\dot{q}_k,\ \text{ecc.}$$

Riportando queste espressioni nella funzione

$$L=\frac{1}{2}\sum_a m_a(\dot{x}_a^2+\dot{y}_a^2+\dot{z}_a^2)-U,$$

si ottiene la funzione di Lagrange cercata

$$L=\frac{1}{2}\sum_{i,k} a_{ik}(q)\,\dot{q}_i\dot{q}_k-U(q), \tag{5,5}$$

dove a_{ik} sono funzioni delle sole coordinate. L'energia cinetica in coordinate generalizzate resta sempre funzione quadratica delle velocità, ma può dipendere anche dalle coordinate.

Abbiamo parlato sinora di sistemi isolati. Consideriamo ora un sistema A non isolato, interagente con un sistema B che compie un dato movimento. Si dice in questo caso che il sistema A si muove in un dato campo esterno (creato dal sistema B). Poiché le equazioni del moto vengono dedotte dal principio di minima azione mediante una variazione indipendente di ciascuna delle coordinate (considerando cioè note le altre coordinate), per trovare la funzione di Lagrange L_A del sistema A, possiamo, servirci della lagrangiana L dell'intero sistema $A + B$, sostituendo in essa le coordinate q_B con funzioni date del tempo.

Supponendo il sistema $A + B$ isolato, abbiamo:

$$L = T_A(q_A, \dot{q}_A) + T_B(q_B, \dot{q}_B) - U(q_A, q_B),$$

dove i due primi termini rappresentano le energie cinetiche dei sistemi A e B, e il terzo termine è la loro energia potenziale comune. Sostituendo q_B con funzioni date del tempo e tralasciando il termine $T(q_B(t), \dot{q}_B(t))$ che dipende soltanto dal tempo (e che è quindi la derivata totale di un'altra funzione del tempo), otteniamo:

$$L_A = T_A(q_A, \dot{q}_A) - U(q_A, q_B(t)).$$

In tal modo, il moto di un sistema in un campo esterno è descritto da una funzione di Lagrange del tipo solito, con la sola differenza che l'energia potenziale può ormai dipendere dal tempo esplicitamente.

La forma generale della funzione di Lagrange per il moto di una particella in un campo esterno è

$$L = \frac{mv^2}{2} - U(\mathbf{r}, t), \tag{5,6}$$

e l'equazione del moto

$$m\dot{\mathbf{v}} = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}}. \tag{5,7}$$

Se in tutti i suoi punti una particella è sollecitata dalla stessa forza $\mathbf{F}$ il campo si dice *uniforme*. L'energia potenziale in un tale campo evidentemente è

$$U = -\mathbf{F}\mathbf{r}. \tag{5,8}$$

Per concludere questo paragrafo, facciamo ancora la seguente osservazione sull'applicazione delle equazioni di Lagrange ai diversi problemi concreti. Nella pratica si incontrano spesso sistemi

meccanici in cui l'interazione fra i corpi (punti materiali) ha un carattere di *vincoli*, cioè di limitazioni imposte alla disposizione reciproca dei corpi. In pratica, questi vincoli vengono creati fissando i corpi con varie aste, fili, cerniere. Questa circostanza introduce nel moto un fattore nuovo: il moto dei corpi è accompagnato in questi casi da attrito nei punti di contatto dei corpi, e il problema esce, in generale, dai confini della meccanica pura (vedi § 25). Ciò nondimeno, l'attrito in molti casi è cosí debole da poterne trascurare completamente l'effetto sul moto. Se si possono inoltre trascurare le masse degli « elementi vincolanti » del sistema, l'effetto di quest'ultimi si riduce semplicemente ad una diminuzione del numero di gradi di libertà s del sistema (rispetto al numero $3N$). Per determinare il moto del sistema dato, si può ricorrere nuovamente alla forma (5,5) della funzione di Lagrange con un numero di coordinate generalizzate indipendenti, corrispondente al numero effettivo dei gradi di libertà.

PROBLEMI

Trovare la funzione di Lagrange dei seguenti sistemi collocati in un campo uniforme di gravità (accelerazione di gravità è g).

1. Pendolo doppio oscillante in un piano (fig. 1).

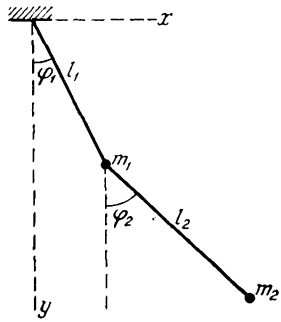


Fig. 1

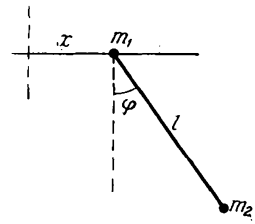


Fig. 2

Soluzione. Come coordinate prendiamo gli angoli φ_1 e φ_2 formati dai fili l_1 ed l_2 con la verticale. Abbiamo allora per la particella m_1:

$$T_1 = \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\varphi}_1^2, \quad U = -m_1 g l_1 \cos \varphi_1.$$

Per trovare l'energia cinetica della seconda particella, esprimiamo le sue coordinate cartesiane x_2, y_2 (l'origine delle coordinate è fissata nel punto di sospensione, l'asse y è diretto verticalmente verso il basso) mediante gli angoli φ_1, φ_2:

$$x_2 = l_1 \operatorname{sen} \varphi_1 + l_2 \operatorname{sen} \varphi_2, \quad y_2 = l_1 \cos \varphi_1 + l_2 \cos \varphi_2.$$

Dopo di che otteniamo:

$$T_2 = \frac{m_2}{2} (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) = \frac{m_2}{2} [l_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + l_2^2 \dot{\varphi}_2^2 + 2 l_1 l_2 \cos (\varphi_1 - \varphi_2) \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2].$$

Infine:

$$L = \frac{m_1+m_2}{2} l_1^2\dot{\varphi}_1^2 + \frac{m_2}{2} l_2^2\dot{\varphi}_2^2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1-\varphi_2) +$$

$$+ (m_1+m_2) g l_1 \cos\varphi_1 + m_2 g l_2 \cos\varphi_2.$$

2. Pendolo piano di massa m_2 il cui punto di sospensione (di massa m_1) può spostarsi su una retta orizzontale (fig. 2)

Soluzione. Introducendo la coordinata x del punto m_1 e l'angolo φ fra il filo del pendolo e la verticale, otteniamo:

$$L = \frac{m_1+m_2}{2} \dot{x}^2 + \frac{m_2}{2} (l^2\dot{\varphi}^2 + 2l\dot{x}\dot{\varphi}\cos\varphi) + m_2 g l \cos\varphi.$$

3. Pendolo piano il cui punto di sospensione:

a) si muove uniformemente lungo una circonferenza verticale con una frequenza costante γ (fig. 3);

b) oscilla orizzontalmente secondo la legge $a \cos \gamma t$;

c) oscilla verticalmente secondo la legge $a \cos \gamma t$.

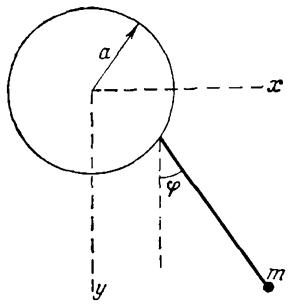


Fig. 3

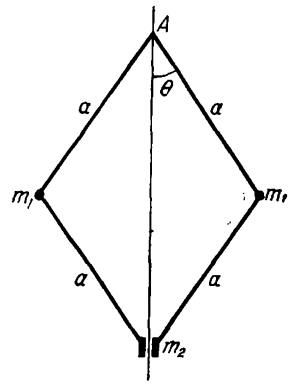


Fig. 4

Soluzione. a) Coordinate del punto m:

$$x = a \cos \gamma t + l \operatorname{sen} \varphi, \quad y = -a \operatorname{sen} \gamma t + l \cos \varphi.$$

Funzione di Lagrange:

$$L = \frac{ml^2}{2} \dot{\varphi}^2 + mla\gamma^2 \operatorname{sen}(\varphi - \gamma t) + mgl \cos \varphi;$$

sono stati omessi qui i termini dipendenti soltanto dal tempo ed è stata eliminata la derivata totale rispetto al tempo di $mal\gamma \cos(\varphi - \gamma t)$.

b) Coordinate del punto m:

$$x = a \cos \gamma t + l \operatorname{sen} \varphi, \quad y = l \cos \varphi.$$

Funzione di Lagrange (omesse le derivate totali):

$$L = \frac{ml^2}{2} \dot{\varphi}^2 + mla\gamma^2 \cos \gamma t \operatorname{sen} \varphi + mgl \cos \varphi.$$

c) In modo analogo troviamo

$$L = \frac{ml^2}{2}\,\dot{\varphi}^2 + mla\gamma^2 \cos \gamma t \cos \varphi + mgl \cos \varphi;$$

4. Il sistema rappresentato nella fig. 4; il punto m_2 si muove lungo l'asse verticale, e tutto il sistema ruota con una velocità angolare costante Ω intorno a questo asse.

Soluzione. Siano θ l'angolo formato dal segmento a e la verticale, e φ l'angolo di rotazione del sistema intorno all'asse; $\varphi = \Omega$. Lo spostamento elementare per ciascuno dei punti m_1 è $dl_1^2 = a^2 d\theta^2 + a^2 \operatorname{sen}^2 \theta d\varphi^2$. La distanza del punto m_2 dal punto di sospensione A è uguale a $2a \cos \theta$, da cui $dl_2 = -2\, a \operatorname{sen} \theta\, d\theta$. La funzione di Lagrange è:

$$L = m_1 a^2 (\dot{\theta}^2 + \Omega^2 \operatorname{sen}^2 \theta) + 2m_2 a^2 \operatorname{sen}^2 \theta \cdot \dot{\theta}^2 + 2ga\,(m_1 + m_2) \cos \theta.$$

Capitolo II

LEGGI DI CONSERVAZIONE

§ 6. *Energia*

Se un sistema meccanico è animato da un moto, le $2s$ grandezze q_i e $\dot{q}_i$ ($i = 1, 2, \ldots, s$) che ne determinano lo stato, variano col tempo. Tuttavia, esistono funzioni di queste grandezze le quali conservano durante il moto valori costanti che dipendono soltanto dalle condizioni iniziali. Tali funzioni sono dette *integrali del moto.*

Per un sistema meccanico isolato avente s gradi di libertà, il numero di integrali del moto indipendenti è uguale a $2s - 1$. Ciò risulta evidente dalle semplici considerazioni seguenti. La soluzione generale delle equazioni del moto contiene $2s$ costanti arbitrarie (vedi pag. 30). Poiché le equazioni del moto di un sistema isolato non contengono esplicitamente il tempo, la scelta dell'origine del tempo è arbitraria, e una delle costanti arbitrarie nella soluzione delle equazioni può essere sempre scelta sotto forma di una costante additiva t_0 del tempo. Eliminando $t + t_0$ dalle $2s$ funzioni

$$q_i = q_i\,(t + t_0,\ C_1,\ C_2,\ \ldots,\ C_{2s-1}),$$

$$\dot{q}_i = \dot{q}_i\,(t + t_0,\ C_1,\ C_2,\ \ldots,\ C_{2s-1}),$$

possiamo esprimere le $2s - 1$ costanti arbitrarie $C_1, C_2, \ldots, C_{2s-1}$ sotto forma di funzioni di $\dot{q}$ e q che saranno integrali del moto.

Ciò nondimeno, non tutti gli integrali del moto hanno un ruolo di uguale importanza in meccanica. Tra questi ce ne sono alcuni la cui invarianza nel tempo ha un'origine assai profonda, connessa alle proprietà fondamentali dello spazio e del tempo, e cioè alla loro omogeneità ed isotropia. Tutte queste grandezze, dette conservative, hanno una proprietà generale importante: esse sono additive, cioè il loro valore per un sistema composto di piú elementi, la cui interazione possa essere trascurata, è uguale alla somma dei valori per ciascuno degli elementi preso separatamente.

È precisamente la proprietà di additività che conferisce alle corrispondenti grandezze una parte di particolare importanza nella meccanica. Supponiamo per esempio che due corpi interagiscano per un certo intervallo di tempo. Poiché, sia prima che dopo l'interazione,

ciascuno degli integrali additivi dell'intero sistema è uguale alla somma dei valori per i due corpi presi separatamente, le leggi di conservazione di queste grandezze permettono direttamente di trarre una serie di conclusioni inerenti allo stato dei corpi dopo l'interazione, se si conosce il loro stato prima dell'interazione.

Cominciamo dalla legge di conservazione che deriva dalla *omogeneità del tempo.*

In virtú di questa omogeneità, la funzione lagrangiana di un sistema isolato non dipende esplicitamente dal tempo. Perciò si può scrivere la derivata totale rispetto al tempo della funzione di Lagrange nella forma seguente:

$$\frac{dL}{dt} = \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i$$

(se L dipendesse esplicitamente dal tempo, al secondo membro dell'uguaglianza si dovrebbe aggiungere il termine $\frac{\partial L}{\partial t}$). Sostituendo secondo le equazioni di Lagrange le derivate $\frac{\partial L}{\partial q_i}$ con $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$, si ottiene:

$$\frac{dL}{dt} = \sum_i \dot{q}_i \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i = \sum_i \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i\right)$$

ovvero

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L\right) = 0.$$

Da queste espressioni si vede che la grandezza

$$E = \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L \tag{6,1}$$

resta invariata nel corso del moto del sistema isolato, cioè essa è uno dei suoi integrali del moto. Questa grandezza si chiama *energia* del sistema. L'additività dell'energia deriva direttamente dall'additività della funzione di Lagrange mediante la quale essa è espressa linearmente secondo la (6,1).

La legge di conservazione dell'energia è valida non soltanto per sistemi isolati, ma anche per sistemi che si trovano in un campo esterno costante (cioè non dipendente dal tempo); infatti, la sola proprietà della funzione di Lagrange che abbiamo utilizzato nei nostri ragionamenti, ossia la mancanza di una dipendenza esplicita dal tempo, sussiste anche in questo caso. I sistemi meccanici la cui energia si conserva sono detti talvolta *conservativi.*

Come abbiamo visto nel § 5, la funzione lagrangiana di un sistema isolato (o posto in un campo costante) ha la forma:

$$L = T(q, \dot{q}) - U(q),$$

dove T è una funzione quadratica delle velocità. Applicando qui il noto teorema di Eulero sulle funzioni omogenee, si ottiene:

$$\sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = 2T.$$

Riportando questo valore nella (6,1), troviamo:

$$E = T(q, \dot{q}) + U(q); \tag{6,2}$$

e in coordinate cartesiane:

$$E = \sum_a \frac{m_a v_a^2}{2} + U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots). \tag{6,3}$$

Dunque, l'energia di un sistema può essere presentata sotto forma di somma di due termini aventi una natura fisica sostanzialmente diversa: l'energia cinetica, che dipende dalle velocità, e l'energia potenziale dipendente solo dalle coordinate delle particelle.

§ 7. *Quantità di moto*

Un'altra legge di conservazione appare in connessione con l'*omogeneità dello spazio*.

In virtú di questa omogeneità, le proprietà meccaniche di un sistema isolato non cambiano in una traslazione parallela qualsiasi di questo sistema nel suo insieme nello spazio. Consideriamo una traslazione infinitesima ε e imponiamo che la funzione di Lagrange resti immutata.

Traslazione parallela significa una trasformazione in cui tutti i punti del sistema si spostano di uno stesso segmento, cioè, i loro raggi vettori $\mathbf{r}_a \to \mathbf{r}_a + \varepsilon$. La variazione della funzione L in seguito a una variazione infinitesima delle coordinate delle particelle, invariate restando le velocità, è

$$\delta L = \sum_a \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_a} \delta \mathbf{r}_a = \varepsilon \sum_a \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_a},$$

dove la sommatoria è estesa a tutti i punti materiali del sistema. Essendo ε arbitrario, la condizione $\delta L = 0$ è equivalente alla condi-

zione

$$\sum_a \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_a} = 0. \tag{7,1}$$

Quindi, in forza delle equazioni di Lagrange (5,2), otteniamo:

$$\sum_a \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_a} = \frac{d}{dt} \sum_a \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_a} = 0.$$

Dunque, siamo giunti alla conclusione che in un sistema meccanico isolato la grandezza vettoriale

$$\mathbf{P} = \sum_a \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_a} \tag{7,2}$$

resta invariata durante il moto. Il vettore **P** è detto *quantità di moto* o *impulso* del sistema. Dalla derivazione della funzione di Lagrange (5,1) resulta che l'impulso si esprime mediante le velocità dei punti nel modo seguente:

$$\mathbf{P} = \sum_a m_a \mathbf{v}_a. \tag{7.3}$$

L'additività dell'impulso è evidente. Inoltre, l'impulso di un sistema, a differenza dell'energia, è uguale alla somma degli impulsi

$$\mathbf{p}_a = m_a \mathbf{v}_a$$

delle singole particelle, indipendentemente dal fatto che la loro interazione sia trascurabile o no.

La legge di conservazione delle tre componenti del vettore impulso sussiste soltanto in assenza di campo esterno. Tuttavia, singole componenti dell'impulso possono conservarsi anche in presenza di un campo se l'energia potenziale in esso non dipende da qualcuna delle coordinate cartesiane. In una traslazione lungo un asse coordinato corrispondente, le proprietà meccaniche del sistema evidentemente non cambiano, e in modo analogo, troveremo che la proiezione dell'impulso su questo asse si conserva. Cosí, in un campo uniforme, diretto lungo l'asse z, si conservano le componenti dell'impulso lungo gli assi x ed y.

L'uguaglianza iniziale (7,1) ha un semplice significato fisico. La derivata $\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_a} = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_a}$ rappresenta la forza $\mathbf{F}_a$ agente sulla a-esima particella. L'uguaglianza (7,1) significa quindi che la somma delle forze agenti su tutte le particelle di un sistema isolato è uguale a zero:

$$\sum_a \mathbf{F}_a = 0. \tag{7,4}$$

In particolare, se si tratta di un sistema composto soltanto di due punti materiali, $\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = 0$, la forza agente sulla prima particella da parte della seconda è uguale in modulo, ma opposta in direzione alla forza agente sulla seconda particella da parte della prima. Questa asserzione è nota sotto il nome di legge di uguaglianza dell'azione e della reazione.

Se il moto è descritto mediante coordinate generalizzate q_i, le derivate della funzione lagrangiana rispetto alle velocità generalizzate

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \tag{7,5}$$

sono dette allora *impulsi generalizzati*, e le derivate

$$F_i = \frac{\partial L}{\partial q_i} \tag{7,6}$$

sono dette *forze generalizzate*. Le equazioni di Lagrange si scrivono allora:

$$\dot{p}_i = F_i. \tag{7,7}$$

Gli impulsi generalizzati in coordinate cartesiane coincidono con le componenti dei vettori $\mathbf{p}_a$. Nel caso generale, le grandezze p_i sono funzioni lineari omogenee delle velocità generalizzate $\dot{q}_i$ che non si possono ridurre a semplici prodotti di massa per velocità.

PROBLEMA

Una particella di massa m, moventesi con velocità $\mathbf{v}_1$, passa da un semispazio dove la sua energia potenziale è costante ed uguale ad U_1, in un altro semispazio dove questa energia è pure costante ma uguale ad U_2. Determinare il cambiamento di direzione del moto della particella.

Soluzione. L'energia potenziale non dipende dalle coordinate lungo gli assi paralleli al piano di separazione dei due semispazi. Per questo la proiezione dell'impulso della particella su questo piano si conserva. Siano $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ le velocità della particella prima e dopo l'attraversamento del piano, e θ_1 e θ_2 gli angoli formati da queste velocità con la normale al piano di separazione; otteniamo allora $v_1 \operatorname{sen} \theta_1 = v_2 \operatorname{sen} \theta_2$. Ma la relazione tra v_1 e v_2 è data dalla legge di conservazione dell'energia, da cui si ottiene in definitiva

$$\frac{\operatorname{sen} \theta_1}{\operatorname{sen} \theta_2} = \sqrt{1 + \frac{2}{mv_1^2}(U_1 - U_2)}.$$

§ 8. *Centro di massa*

L'impulso di un sistema meccanico isolato ha valori diversi rispetto a sistemi di riferimento (inerziali) diversi. Se un sistema di riferimento K' si muove rispetto ad un altro sistema K con velocità $\mathbf{V}$, le velocità $\mathbf{v}'_a$ e $\mathbf{v}_a$ delle particelle rispetto a questi sistemi sono legate dalla relazione $\mathbf{v}_a = \mathbf{v}'_a + \mathbf{V}$. Perciò la relazione tra i valori $\mathbf{P}$ e $\mathbf{P}'$

dell'impulso in questi sistemi è data dalla formula

$$\mathbf{P} = \sum_b m_a \mathbf{v}_a = \sum_a m_a \mathbf{v}'_a + \mathbf{V} \sum_a m_a,$$

o

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}' + \mathbf{V} \sum m_a. \tag{8,1}$$

In particolare, esiste sempre un sistema di riferimento K' in cui l'impulso totale è nullo. Ponendo nella (8,1) $\mathbf{P}' = 0$, troviamo che la velocità di questo sistema di riferimento è uguale a

$$\mathbf{V} = \frac{\mathbf{P}}{\sum m_a} = \frac{\sum m_a \mathbf{v}_a}{\sum m_a}. \tag{8,2}$$

Se l'impulso totale di un sistema meccanico è nullo, si dice allora che questo sistema persevera in quiete rispetto al corrispondente sistema di riferimento. Questa è una espressione che generalizza in modo del tutto naturale il concetto di quiete per un punto materiale isolato. Analogamente la velocità $\mathbf{V}$, data dalla formula (8,2), acquista il significato di velocità del « moto » di un sistema meccanico preso come un insieme indivisibile e avente un impulso differente da zero. Vediamo dunque che la legge di conservazione dell'impulso permette di formulare in maniera naturale il concetto di quiete e di velocità di un sistema meccanico come insieme intero.

La formula (8,2) mostra che la relazione tra l'impulso $\mathbf{P}$ e la velocità $\mathbf{V}$ di un sistema nel suo insieme è identica alla relazione esistente tra l'impulso e la velocità di un punto materiale di massa $\mu = \sum m_a$, uguale alla somma delle masse di tutte le particelle puntiformi del sistema. Si può esprimere questo fatto affermando l'*additività della massa*.

Il secondo membro della formula (8,2) può essere espresso come derivata totale rispetto al tempo dell'espressione

$$\mathbf{R} = \frac{\sum m_a \mathbf{r}_a}{\sum m_a}. \tag{8,3}$$

Si può dire che la velocità di un sistema nell'insieme è la velocità di spostamento nello spazio di un punto il cui raggio vettore è dato dalla formula (8,3). Questo punto è chiamato *centro di massa* del sistema.

Si può formulare la legge di conservazione dell'impulso di un sistema isolato dicendo che il suo centro di massa si muove di moto rettilineo uniforme. In questa forma, la precedente affermazione rappresenta la generalizzazione della legge d'inerzia stabilita nel § 3 per un punto materiale libero il cui « centro di massa » coincide con il punto stesso.

Nello studio delle proprietà meccaniche di un sistema isolato è naturale servirsi di un sistema di riferimento in cui il centro di massa persevera in quiete. Si esclude quindi la necessità di considerare il moto uniforme e rettilineo del sistema in blocco.

L'energia di un sistema meccanico perseverante in quiete in blocco solitamente si chiama *energia interna* E_{int} di questo sistema. Essa include in sé l'energia cinetica relativa al moto delle particelle nel sistema e l'energia potenziale della loro interazione. Quanto all'energia totale di un sistema che si muove in blocco con velocità V, essa può essere espressa nella forma:

$$E = \frac{\mu V^2}{2} + E_{\text{int}}. \tag{8,4}$$

Sebbene questa formula sia evidente, ne diamo però una deduzione diretta. Le energie E ed E' di un sistema meccanico in due sistemi di riferimento K e K' sono legate dalla relazione

$$E = \frac{1}{2}\sum_a m_a v_a^2 + U = \frac{1}{2}\sum_a m_a (\mathbf{v}'_a + \mathbf{V})^2 + U =$$

$$= \frac{\mu V^2}{2} + \mathbf{V}\sum_a m_a \mathbf{v}'_a + \sum_a \frac{m_a v'^2_a}{2} + U$$

ossia

$$E = E' + \mathbf{VP}' + \frac{\mu V^2}{2}. \tag{8,5}$$

Questa formula definisce la legge di trasformazione dell'energia nel passare da un sistema di riferimento ad un altro; per l'impulso questa legge è data dalla formula (8,1). Se nel sistema K' il centro di massa persevera in quiete, allora $\mathbf{P}' = 0$, $E' = E_{\text{int}}$, e noi ritorniamo alla formula (8,4).

PROBLEMA

Trovare la legge di trasformazione dell'azione quando si passa da un sistema di riferimento inerziale ad un altro.

Soluzione. La funzione di Lagrange è uguale alla differenza delle energie cinetica e potenziale. È evidente che essa si trasforma secondo una formula analoga alla (8,5), e cioè:

$$L = L' + \mathbf{VP}' + \frac{1}{2}\mu V^2.$$

Integrando questa uguaglianza rispetto al tempo, troviamo la legge richiesta di trasformazione dell'azione:

$$S = S' + \mu \mathbf{VR}' + \frac{1}{2}\mu V^2 t,$$

dove $\mathbf{R}'$ è il raggio vettore del centro di massa nel sistema K'.

§ 9. *Momento della quantità di moto*

Passiamo ora alla deduzione della legge di conservazione che deriva dall'*isotropia dello spazio*.

Questa isotropia significa che le proprietà meccaniche di un sistema isolato non cambiano, qualunque sia la rotazione nello spazio di tutto il sistema in blocco. Consideriamo pertanto il caso di una

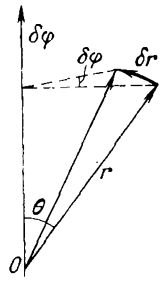


Fig. 5

rotazione infinitesima del sistema ponendo la condizione che la funzione di Lagrange resti invariata.

Chiamiamo vettore della rotazione infinitesima $\delta\boldsymbol{\varphi}$ il vettore di modulo pari all'angolo di rotazione $\delta\varphi$ e diretto come l'asse di rotazione (il verso della rotazione rispetto al verso di $\delta\boldsymbol{\varphi}$ risponde alla regola della vite).

Cerchiamo anzitutto a che cosa è uguale, in una tale rotazione, l'incremento del raggio vettore tracciato dalla origine delle coordinate (collocata sull'asse di rotazione) ad un qualunque punto materiale del sistema soggetto a rotazione. Lo spostamento lineare dell'estremo del raggio vettore è collegato con l'angolo dalla relazione

$$|\delta \mathbf{r}| = r \operatorname{sen} \theta \cdot \delta\varphi$$

(fig. 5), mentre la direzione del vettore è perpendicolare al piano passante per $\mathbf{r}$ e $\delta\boldsymbol{\varphi}$. È chiaro quindi che

$$\delta \mathbf{r} = [\delta\boldsymbol{\varphi} \cdot \mathbf{r}]^{1)}. \qquad (9,1)$$

Nella rotazione del sistema cambia non solo la direzione dei raggi vettori, ma anche delle velocità di tutte le particelle; tutti i vettori inoltre si trasformano secondo la stessa legge. Per questo l'incremento

---

[1]) Nel presente volume per il prodotto vettoriale di due vettori **a** e **b** è usato il simbolo [**ab**] mentre il prodotto scalare è indicato con **ab** (N. d. R.).

della velocità rispetto al sistema di coordinate immobile è

$$\delta \mathbf{v} = [\delta\boldsymbol{\varphi} \cdot \mathbf{v}]. \tag{9,2}$$

Riportando queste espressioni nella condizione d'invarianza per rotazione della funzione lagrangiana

$$\delta L = \sum_a \left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_a} \delta \mathbf{r}_a + \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_a} \delta \mathbf{v}_a \right) = 0,$$

sostituiamo le derivate $\partial L/\partial \mathbf{v}_a = \mathbf{p}_a$, $\partial L/\partial \mathbf{r}_a = \dot{\mathbf{p}}_a$:

$$\sum_a (\dot{\mathbf{p}}_a [\delta\boldsymbol{\varphi} \cdot \mathbf{r}_a] + \mathbf{p}_a [\delta\boldsymbol{\varphi} \cdot \mathbf{v}_a]) = 0,$$

o, con uno scambio ciclico dei fattori e portando $\delta\boldsymbol{\varphi}$ fuori dal segno di somma, otteniamo:

$$\delta\boldsymbol{\varphi} \sum_a ([\mathbf{r}_a \dot{\mathbf{p}}_a] + [\mathbf{v}_a \mathbf{p}_a]) = \delta\boldsymbol{\varphi} \frac{d}{dt} \sum_a [\mathbf{r}_a \mathbf{p}_a] = 0.$$

Essendo $\delta\boldsymbol{\varphi}$ arbitraria, segue che

$$\frac{d}{dt} \sum_a [\mathbf{r}_a \mathbf{p}_a] = 0,$$

in altri termini, siamo giunti alla conclusione che nel moto di un sistema isolato si conserva la grandezza vettoriale

$$\mathbf{M} = \sum_a [\mathbf{r}_a \mathbf{p}_a], \tag{9,3}$$

detta *momento della quantità di moto* (o semplicemente *momento*) del sistema[1]). L'additività di questa grandezza è evidente. Per di piú, essa, come nel caso dell'impulso, è indipendente dal fatto che si abbia o meno interazione tra le particelle.

Con questo si esauriscono gli integrali del moto additivi. Quindi ogni sistema isolato ha in tutto sette integrali del moto di questo tipo: l'energia, le tre componenti del vettore impulso e le tre componenti del vettore momento angolare.

Poiché i raggi vettori delle particelle entrano nella definizione del momento, il valore di quest'ultimo dipende in generale dalla scelta dell'origine delle coordinate. I raggi vettori $\mathbf{r}_a$ ed $\mathbf{r}'_a$ di uno stesso punto rispetto a due origini separate da una distanza $\mathbf{a}$ sono legati dalla relazione $\mathbf{r}_a = \mathbf{r}'_a + \mathbf{a}$. Si ha quindi:

$$\mathbf{M} = \sum_a [\mathbf{r}_a \mathbf{p}_a] = \sum_a [\mathbf{r}'_a \mathbf{p}_a] + [\mathbf{a} \sum_a \mathbf{p}_a]$$

---

[1]) Si usa anche la denominazione « momento angolare » o « momento rotazionale ».

o

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}' + [\mathbf{aP}]. \tag{9,4}$$

Da questa formula risulta che solo nel caso in cui il sistema in blocco persevera in stato di quiete (cioè $\mathbf{P} = 0$), il momento angolare non dipende dalla scelta dell'origine delle coordinate. È evidente che questa indeterminazione del valore del momento angolare non influisce sulla legge di conservazione del momento perché, per un sistema isolato, anche l'impulso si conserva.

Stabiliamo ora una formula che lega i valori del momento angolare in due differenti sistemi di riferimento inerziali K e K' dei quali il secondo si muove rispetto al primo con velocità $\mathbf{V}$. Partiremo dall'ipotesi che le origini delle coordinate nei sistemi K e K' coincidano ad un istante dato. Allora i raggi vettori delle particelle nei due sistemi sono uguali, e la relazione tra le velocità è $\mathbf{v}_a = \mathbf{v}'_a + \mathbf{V}$. Abbiamo quindi

$$\mathbf{M} = \sum_a m_a [\mathbf{r}_a \mathbf{v}_a] = \sum_a m_a [\mathbf{r}_a \mathbf{v}'_a] + \sum_a m_a [\mathbf{r}_a \mathbf{V}].$$

La prima somma del secondo membro di questa uguaglianza è il momento $\mathbf{M}'$ nel sistema K'; introducendo nella seconda somma il raggio vettore del centro di massa secondo la (8,3), otteniamo:

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}' + \mu [\mathbf{RV}]. \tag{9,5}$$

Questa formula definisce la legge di trasformazione del momento angolare nel passaggio da un sistema di riferimento ad un altro in modo simile alle leggi analoghe per l'impulso e l'energia date dalle formule (8,1) e (8,5).

Se il sistema di riferimento K' è quello in cui il dato sistema meccanico è in quiete in blocco, $\mathbf{V}$ è la velocità del centro di massa di questo sistema, e $\mu\mathbf{V}$ il suo impulso totale $\mathbf{P}$ (rispetto a K). Si ha allora:

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}' + [\mathbf{RP}]. \tag{9,6}$$

In altri termini, il momento angolare $\mathbf{M}$ di un sistema meccanico consta del suo « momento angolare intrinseco » rispetto al sistema di riferimento nel quale esso persevera in quiete, e del momento $[\mathbf{RP}]$ legato al moto del sistema come insieme.

Sebbene la legge di conservazione delle tre componenti del momento (rispetto ad un'origine delle coordinate arbitraria) sussista soltanto per sistemi isolati, essa, in una forma piú limitata, può sussistere anche per sistemi collocati in un campo esterno. Dai ragionamenti precedenti è evidente che si conserva sempre la proiezione del momento su quell'asse rispetto al quale il dato campo è simmetrico; di conseguenza, le proprietà meccaniche del sistema non cambiano, qualunque sia la rotazione intorno a questo asse; resta inteso, però,

che il momento deve essere definito rispetto ad un punto (origine delle coordinate) situato su questo stesso asse.

Il caso piú importante di questo genere è quello di un campo a simmetria centrale, cioè un campo in cui l'energia potenziale dipende soltanto dalla distanza da un punto (centro) determinato nello spazio. È evidente che durante il moto in un tale campo si conserva la proiezione del momento su ogni asse passante per il centro. In altri termini, si conserva il vettore momento **M**, ma solo se esso è definito, però, rispetto non a un punto qualsiasi dello spazio, ma al centro del campo.

Un altro esempio: un campo iniforme diretto come l'asse z nel quale si conserva la proiezione M_z del momento, e l'origine delle coordinate può essere scelta in modo arbitrario.

Osserviamo che la proiezione del momento angolare su un asse qualunque (chiamiamolo z) può essere ottenuta derivando la funzione di Lagrange secondo la formula

$$M_z = \sum_a \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_a}, \tag{9,7}$$

dove φ è l'angolo di rotazione intorno all'asse z. Ciò deriva chiaramente dallo stesso modo in cui abbiamo stabilito la legge di conservazione del momento angolare, ma di questo ci si può convincere con un calcolo diretto. In coordinate cilindriche r, φ, z (ponendo $x_a = r_a \cos \varphi_a$, $y_a = r_a \operatorname{sen} \varphi_a$) abbiamo:

$$M_z = \sum_a m_a (x_a \dot{y}_a - y_a \dot{x}_a) = \sum_a m_a r_a^2 \dot{\varphi}_a. \tag{9,8}$$

D'altra parte, la funzione di Lagrange in queste variabili ha la forma

$$L = \frac{1}{2} \sum_a m_a (\dot{r}_a^2 + r_a^2 \dot{\varphi}_a^2 + \dot{z}_a^2) - U$$

che, posta nella formula (9,7), dà la stessa espressione (9,8).

PROBLEMI

1. Trovare le espressioni per le componenti cartesiane e per il valore assoluto del momento angolare di una particella in coordinate cilindriche r, φ, z.

Risposta:

$$M_x = m \operatorname{sen} \varphi (r\dot{z} - z\dot{r}) - mrz\dot{\varphi} \cos \varphi,$$

$$M_y = m \cos \varphi (z\dot{r} - r\dot{z}) - mrz\dot{\varphi} \operatorname{sen} \varphi,$$

$$M_z = mr^2\dot{\varphi},$$

$$M^2 = m^2 r^2 \dot{\varphi}^2 (r^2 + z^2) + m^2 (r\dot{z} - z\dot{r})^2.$$

2. Lo stesso problema in coordinate sferiche r, θ, φ.
Risposta:

$$M_x = -mr^2 (\dot{\theta} \operatorname{sen} \varphi + \dot{\varphi} \operatorname{sen} \theta \cos \theta \cos \varphi),$$

$$M_y = mr^2 (\dot{\theta} \cos \varphi - \dot{\varphi} \operatorname{sen} \theta \cos \theta \operatorname{sen} \varphi),$$

$$M_z = mr^2 \operatorname{sen}^2 \theta \cdot \dot{\varphi},$$

$$M^2 = m^2 r^4 (\dot{\theta}^2 + \operatorname{sen}^2 \theta \cdot \dot{\varphi}^2).$$

3. Indicare le componenti dell'impulso **P** e del momento **M** che si conservano durante il moto nei campi seguenti:
a) Campo di un piano omogeneo indefinito.
Risposta. P_x, P_y, M_z (il piano indefinito è il piano x, y).
b) Campo di un cilindro omogeneo indefinito.
Risposta. M_z, P_z (l'asse del cilindro è l'asse z).
c) Campo di un prisma omogeneo indefinito.
Risposta. P_z (gli spigoli del prisma sono paralleli all'asse z).
d) Campo di due punti materiali.
Risposta. M_z (i punti sono situati sull'asse z).
e) Campo di un semipiano omogeneo indefinito.
Risposta. P_y (il semipiano indefinito è una parte del piano x, y limitato dall'asse y).
f) Campo di un cono omogeneo.
Risposta. M_z (l'asse del cono è l'asse z).
g) Campo di un toro circolare omogeneo.
Risposta. M_z (l'asse del toro è l'asse z).
h) Campo di un'elica cilindrica omogenea indefinita.
Soluzione. La funzione di Lagrange non varia in una rotazione di un angolo $\delta\varphi$ intorno all'asse dell'elica (asse z) accompagnata da una traslazione lungo questo asse di una distanza $\frac{h}{2\pi}\delta\varphi$ (h è il passo dell'elica). Pertanto

$$\delta L = \frac{\partial L}{\partial z}\delta z + \frac{\partial L}{\partial \varphi}\delta\varphi = \left(\dot{P}_z \frac{h}{2\pi} + \dot{M}_z\right)\delta\varphi = 0,$$

quindi

$$M_z + \frac{h}{2\pi} P_z = \text{costante}.$$

§ 10. *Similitudine meccanica*

Se si moltiplica funzione di Lagrange per una costante arbitraria non si alterano le equazioni del moto. Grazie a questa circostanza (già notata nel § 2) è possibile, in alcuni casi importanti, trarre alcune conclusioni sostanziali inerenti alle proprietà del moto, senza eseguire di fatto l'integrazione delle equazioni del moto.

Per esempio, casi simili si hanno quando l'energia potenziale è una funzione omogenea delle coordinate, cioè una funzione che soddisfa la condizione

$$U(\alpha \mathbf{r}_1, \alpha \mathbf{r}_2, \ldots, \alpha \mathbf{r}_n) = \alpha^k U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_n), \qquad (10,1)$$

dove α è una costante qualunque, e il numero k il grado di omogeneità della funzione.

Eseguiamo sulle variabili le trasformazioni seguenti: moltiplichiamo tutte le coordinate per una stessa costante α e il tempo per un'altra costante arbitraria β:

$$\mathbf{r}_a \to \alpha \mathbf{r}_a, \quad t \to \beta t.$$

Tutte le velocità $\mathbf{v}_a = \frac{d\mathbf{r}_a}{dt}$ variano allora di α/β volte, e l'energia cinetica di α^2/β^2 volte. L'energia potenziale viene invece moltiplicata per α^k. Se α e β sono legate dalla condizione

$$\frac{\alpha^2}{\beta^2} = \alpha^k, \quad \text{cioè } \beta = \alpha^{1-\frac{k}{2}},$$

allora, per questa trasformazione, la funzione di Lagrange sarà globalmente moltiplicata per il fattore costante α^k, cioè le equazioni del moto restano invariate.

Moltiplicare tutte le coordinate delle particelle per uno stesso numero significa passare da determinate traiettorie ad altre geometricamente simili alle prime e da queste differenziantisi soltanto per le dimensioni lineari. Siamo giunti dunque alla seguente conclusione: se l'energia potenziale di un sistema è una funzione omogenea di k-esimo grado delle coordinate (cartesiane), le equazioni del moto ammettono allora traiettorie geometricamente simili; tutti i tempi del moto (presi in punti corrispondenti delle traiettorie) stanno tra loro nel rapporto

$$\frac{t'}{t} = \left(\frac{l'}{l}\right)^{1-\frac{k}{2}}, \tag{10,2}$$

dove l'/l è il rapporto delle dimensioni lineari di due traiettorie. Insieme con i tempi, stanno nel rapporto l'/l elevato a una determinata potenza anche i valori di tutte le grandezze meccaniche nei corrispondenti punti delle traiettorie nei corrispondenti istanti. Cosí per la velocità, l'energia e il momento angolare si ha

$$\frac{v'}{v} = \left(\frac{l'}{l}\right)^{\frac{k}{2}}, \quad \frac{E'}{E} = \left(\frac{l'}{l}\right)^{k}, \quad \frac{M'}{M} = \left(\frac{l'}{l}\right)^{1+\frac{k}{2}}. \tag{10,3}$$

Diamo qualche esempio per illustrare questo fatto.

Come vedremo piú avanti, nel caso delle *piccole oscillazioni*, l'energia potenziale è una funzione quadratica delle coordinate ($k = 2$). La formula (10,2) mostra che il periodo di queste oscillazioni non dipende dalla loro ampiezza.

In un campo di forze uniforme, l'energia potenziale è una funzione lineare delle coordinate [vedi (5,8)], cioè $k = 1$. Dalla (10,2) abbiamo

$$\frac{t'}{t} = \sqrt{\frac{l'}{l}}.$$

Da questa uguaglianza segue, per esempio, che nella caduta dei gravi i quadrati dei tempi di caduta sono proporzionali alle altezze da cui i corpi cadono.

Nell'attrazione newtoniana di due masse, o nell'interazione coulombiana di due cariche, l'energia potenziale è inversamente proporzionale alla distanza tra le particelle; in altri termini, essa è una funzione omogenea di grado $k = -1$. In questi casi

$$\frac{t'}{t} = \left(\frac{l'}{l}\right)^{3/2},$$

e noi possiamo affermare, per esempio, che i quadrati dei tempi di rivoluzione di corpi sulle loro orbite sono proporzionali ai cubi delle dimensioni di quest'ultime (*terza legge di Keplero*).

Se il moto di un sistema, la cui energia potenziale è una funzione omogenea delle coordinate, avviene in una regione limitata dello spazio, esiste sempre una relazione assai semplice fra i valori medi, rispetto al tempo, dell'energia cinetica e dell'energia potenziale; essa è nota sotto il nome di *teorema del viriale*.

Poiché l'energia cinetica T è una funzione quadratica delle velocità, si ha, in virtú del teorema di Eulero sulle funzioni omogenee:

$$\sum_a \frac{\partial T}{\partial \mathbf{v}_a} \mathbf{v}_a = 2T,$$

ossia, introducendo gli impulsi $\frac{\partial T}{\partial \mathbf{v}_a} = \mathbf{p}_a$:

$$2T = \sum_a \mathbf{p}_a \mathbf{v}_a = \frac{d}{dt}\left(\sum_a \mathbf{p}_a \mathbf{r}_a\right) - \sum_a \mathbf{r}_a \dot{\mathbf{p}}_a. \qquad (10,4)$$

Prendiamo la media rispetto al tempo di questa uguaglianza. Si chiama valore medio di una funzione qualunque del tempo $f(t)$ la grandezza

$$\bar{f} = \lim_{\tau \to \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau f(t)\, dt.$$

È facile vedere che se $f(t)$ è la derivata rispetto al tempo $f(t) = \frac{dF(t)}{dt}$ di una funzione limitata $F(t)$ (cioè di una funzione che non assume valori infiniti), allora il suo valore medio si annulla. Infatti,

$$\bar{f} = \lim_{\tau \to \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \frac{dF}{dt}\, dt = \lim_{\tau \to \infty} \frac{F(\tau) - F(0)}{\tau} = 0.$$

Supponiamo che un sistema si muova in una regione finita dello spazio e con velocità non tendenti all'infinito. Allora la grandezza $\sum \mathbf{r}_a \mathbf{p}_a$ è limitata, e il valore medio del primo termine del secondo membro dell'uguaglianza (10,4) si annulla. Sostituendo nel secondo termine, conformemente alle equazioni di Newton, $\dot{\mathbf{p}}_a$ con $-\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_a}$ si ottiene[1]):

$$2\overline{T} = \sum_a \mathbf{r}_a \frac{\overline{\partial U}}{\partial \mathbf{r}_a}. \tag{10,5}$$

Se l'energia potenziale è una funzione omogenea di k-esimo grado di tutti i raggi vettori $\mathbf{r}_a$, allora secondo il teorema di Eulero l'uguaglianza (10,5) si trasforma nella relazione cercata

$$2\overline{T} = k\overline{U}. \tag{10,6}$$

Siccome $\overline{T} + \overline{U} = \overline{E} = E$, si può scrivere la relazione (10,6) nelle forme equivalenti:

$$\overline{U} = \frac{2}{k+2} E, \quad \overline{T} = \frac{k}{k+2} E, \tag{10,7}$$

dove $\overline{U}$ e $\overline{T}$ sono espresse mediante l'energia totale del sistema.

In particolare, per le piccole oscillazioni ($k = 2$) si ha:

$$\overline{T} = \overline{U},$$

cioè i valori medi delle energie cinetica e potenziale sono uguali. Per l'interazione newtoniana ($k = -1$):

$$2\overline{T} = -\overline{U}.$$

In questo caso $E = -\overline{T}$, in connessione con il fatto che per questa interazione il moto avviene in una regione finita dello spazio soltanto se l'energia totale è negativa (vedi il § 15).

PROBLEMI

1. In che rapporto stanno i tempi di moto su traiettorie identiche di particelle con masse diverse, a parità di energia potenziale?

Risposta:

$$\frac{t'}{t} = \sqrt{\frac{m'}{m}}.$$

2. Come cambiano i tempi di moto su traiettorie uguali cambiando l'energia potenziale di un fattore costante?

Risposta:

$$\frac{t'}{t} = \sqrt{\frac{U}{U'}}.$$

---

[1]) L'espressione al secondo membro dell'uguaglianza (10,5) è chiamata talvolta viriale del sistema.

Capitolo III

INTEGRAZIONE DELLE EQUAZIONI DEL MOTO

§ 11. *Moto unidimensionale*

Si chiama unidimensionale il moto di un sistema con un solo grado di libertà. La forma piú generale della funzione lagrangiana per un tale sistema, soggetto a condizioni esterne costanti, è

$$L = \frac{1}{2} a(q)\, \dot{q}^2 - U(q), \tag{11,1}$$

dove $a(q)$ è una funzione della coordinata generalizzata q. In particolare, se q è una coordinata cartesiana (chiamiamola x),

$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - U(x). \tag{11,2}$$

Le equazioni del moto corrispondenti a queste funzioni lagrangiane si integrano in forma generale. Per questo non occorre neppure scrivere l'equazione stessa del moto; conviene partire direttamente dal loro integrale primo, cioè dall'equazione che esprime la legge di conservazione dell'energia. Cosí, per la funzione di Lagrange (11,2), abbiamo:

$$\frac{m\dot{x}^2}{2} + U(x) = E.$$

Questa è un'equazione differenziale del primo ordine che si integra per separazione delle variabili. Si ha

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}[E - U(x)]},$$

da cui

$$t = \sqrt{\frac{m}{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}} + \text{costante}. \tag{11,3}$$

La parte delle due costanti arbitrarie nella soluzione delle equazioni del moto è qui tenuta dall'energia totale E e dalla costante d'integrazione.

Poiché l'energia cinetica è una grandezza sostanzialmente positiva, durante il moto l'energia totale è sempre maggiore dell'energia

potenziale, cioè il moto può avvenire soltanto nelle regioni dello spazio dove $U(x) < E$.

Supponiamo, ad esempio, che la funzione $U(x)$ abbia l'andamento rappresentato nella fig. 6. Se tracciamo su questo grafico una retta orizzontale corrispondente ad un valore dato dell'energia totale, vedremo subito quali sono le regioni possibili di moto. Cosí,

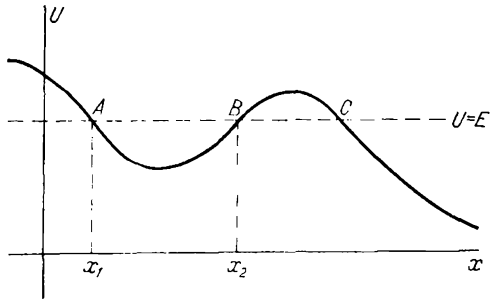


Fig. 6

nel caso della fig. 6, il moto può effettuarsi soltanto in AB o regione a destra di C.

I punti nei quali l'energia potenziale è uguale all'energia totale

$$U(x) = E \tag{11,4}$$

fissano i limiti del moto. Questi sono i *punti d'arresto* in quanto la velocità in essi è nulla. Se la regione del moto è limitata da due questi punti, il moto avviene in una regione limitata dello spazio; si dice allora che esso è *finito*. Se invece la regione del moto è illimitata o limitata soltanto da un lato, il moto è detto *infinito*, la particella se ne va all'infinito.

Un moto unidimensionale finito è oscillatorio: la particella compie un moto di andirivieni periodico tra due limiti (nella fig. 6, nella *buca di potenziale* AB tra i punti x_1 ed x_2). Tenendo conto della proprietà generale di reversibilità (pag. 37), il tempo del moto da x_1 ad x_2 è uguale al tempo del moto inverso da x_2 ad x_1. Di conseguenza, il periodo delle oscillazioni T, cioè il tempo impiegato dal punto per andare da x_1 ad x_2 e ritornare in x_1, è uguale al doppio del tempo necessario per percorrere il segmento x_1x_2, oppure secondo la (11,3),

$$T(E) = \sqrt{2m} \int_{x_1(E)}^{x_2(E)} \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}}, \tag{11,5}$$

dove i limiti x_1 ed x_2 sono radici dell'equazione (11,4) per un valore dato di E. Questa formula esprime il periodo del moto in funzione dell'energia totale della particella.

PROBLEMI

1. **Determinare il periodo delle oscillazioni di un pendolo matematico piano (un punto m all'estremità di un filo di lunghezza l in un campo di gravità) in funzione della loro ampiezza.**

Soluzione. L'energia del pendolo è

$$E=\frac{ml^2\dot{\varphi}^2}{2}-mgl\cos\varphi=-mgl\cos\varphi_0,$$

dove φ è l'angolo di scostamento del filo dalla verticale; φ_0 è l'angolo massimo. Essendo il periodo uguale al tempo quadruplicato impiegato per il percorso da 0 a φ_0, si ha:

$$T=4\sqrt{\frac{l}{2g}}\int_0^{\varphi_0}\frac{d\varphi}{\sqrt{\cos\varphi-\cos\varphi_0}}=2\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\varphi_0}\frac{d\varphi}{\sqrt{\operatorname{sen}^2\frac{\varphi_0}{2}-\operatorname{sen}^2\frac{\varphi}{2}}}.$$

Ponendo $\operatorname{sen}\frac{\varphi}{2}/\operatorname{sen}\frac{\varphi_0}{2}=\operatorname{sen}\xi$, questo integrale diventa

$$T=4\sqrt{\frac{l}{g}}\,K\left(\operatorname{sen}\frac{\varphi_0}{2}\right),$$

dove

$$K(k)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\xi}{\sqrt{1-k^2\operatorname{sen}^2\xi}}$$

è il cosiddetto integrale ellittico completo di prima specie. Nel caso delle piccole oscillazioni ($\operatorname{sen}\frac{\varphi_0}{2}\approx\frac{\varphi_0}{2}\ll 1$), lo sviluppo della funzione $K(k)$ ci dà:

$$T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1+\frac{1}{16}\varphi_0^2+\cdots\right).$$

Il primo termine di questa serie corrisponde alla ben nota formula elementare.

2. **Determinare il periodo delle oscillazioni in funzione dell'energia di una particella di massa m che si muove in un campo in cui l'energia potenziale è:**

a) $U=A\,|\,x\,|^n$.

Risposta:

$$T=2\sqrt{2m}\int_0^{(E/A)^{1/n}}\frac{dx}{\sqrt{E-Ax^n}}=\frac{2\sqrt{2m}\,E^{\frac{1}{n}-\frac{1}{2}}}{A^{1/n}}\int_0^1\frac{dy}{\sqrt{1-y^n}}.$$

Ponendo $y^n=u$, l'integrale si riduce ad un integrale euleriano B che si esprime mediante le funzioni Γ:

$$T-\frac{2\sqrt{2\pi m}\,\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)}{nA^{1/n}\Gamma\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{2}\right)}E^{\frac{1}{n}-\frac{1}{2}}.$$

La dipendenza di T da E è in accordo con la legge della similitudine meccanica (10,2), (10,3).

b) $U = -\dfrac{U_0}{\mathrm{ch}^2 \alpha x}$, $-U_0 < E < 0$.

Risposta:

$$T = \frac{\pi \sqrt{2m}}{\alpha \sqrt{|E|}}.$$

c) $U = U_0 \operatorname{tg}^2 \alpha x$.

Risposta:

$$T = \frac{\pi \sqrt{2m}}{\alpha \sqrt{E + U_0}}.$$

§ 12. *Determinazione dell'energia potenziale dal periodo delle oscillazioni*

Vediamo fino a che punto è possibile ristabilire la forma $U(x)$ dell'energia potenziale del campo nel quale una particella compie un moto oscillatorio, partendo dalla conoscenza della dipendenza del

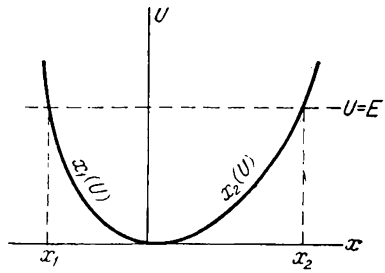


Fig. 7

periodo T dall'energia E. Da un punto di vista matematico si tratta di risolvere l'equazione integrale (11,5) nella quale $U(x)$ è considerata funzione incognita, e $T(E)$ funzione nota.

Supponiamo a priori che la funzione cercata $U(x)$ abbia un solo minimo nella regione considerata dello spazio, e non prendiamo in considerazione la questione dell'esistenza di soluzioni dell'equazione integrale che non soddisfino la nostra condizione. Per ragioni di comodità, scegliamo come origine delle coordinate il punto in cui l'energia potenziale è minima, ponendo il valore di quest'ultima in questo punto uguale a zero (fig. 7).

Trasformiamo l'integrale (11,5), considerando in esso la coordinata x quale funzione di U. La funzione $x(U)$ è biunivoca: a ciascun valore dell'energia potenziale corrispondono due valori differenti di x. Di conseguenza, l'integrale (11,5), nel quale sostituiamo dx con $\frac{dx}{dU}\,dU$, diventa una somma di due integrali: da $x = x_1$ ad

$x = 0$, e da $x = 0$ ad $x = x_2$; indicheremo la dipendenza di x da U in questi due regioni rispettivamente con $x = x_1(U)$ ed $x = x_2(U)$.

Gli estremi d'integrazione in dU saranno, evidentemente, E e 0, e, di conseguenza, otteniamo:

$$T(E) = \sqrt{2m} \int_0^E \frac{dx_2(U)}{dU} \frac{dU}{\sqrt{E-U}} + \sqrt{2m} \int_E^0 \frac{dx_1(U)}{dU} \frac{dU}{\sqrt{E-U}} =$$

$$= \sqrt{2m} \int_0^E \left[\frac{dx_2}{dU} - \frac{dx_1}{dU} \right] \frac{dU}{\sqrt{E-U}}.$$

Dividendo i due membri di questa uguaglianza per $\sqrt{\alpha - E}$, dove α è un parametro, e integrando rispetto a E da 0 ad α, abbiamo:

$$\int_0^\alpha \frac{T(E)\,dE}{\sqrt{\alpha-E}} = \sqrt{2m} \left[\int_0^\alpha \int_0^E \frac{dx_2(U)}{dU} - \frac{dx_1(U)}{dU} \right] \frac{dU\,dE}{\sqrt{(\alpha-E)(E-U)}},$$

ossia, cambiando l'ordine d'integrazione:

$$\int_0^\alpha \frac{T(E)\,dE}{\sqrt{\alpha-E}} = \sqrt{2m} \int_0^\alpha \left[\frac{dx_2(U)}{dU} - \frac{dx_1(U)}{dU} \right] dU \int_U^\alpha \frac{dE}{\sqrt{(\alpha-E)(E-U)}}.$$

L'integrale in dE è elementare e risulta uguale a π. Dopo di che l'integrazione in dU diventa banale e dà

$$\int_0^\alpha \frac{T(E)\,dE}{\sqrt{\alpha-E}} = \pi \sqrt{2m}\,[x_2(\alpha) - x_1(\alpha)]$$

(si è tenuto conto che $x_2(0) = x_1(0) = 0$). Sostituendo ora la lettera α con U, troviamo infine:

$$x_2(U) - x_1(U) = \frac{1}{\pi\sqrt{2m}} \int_0^U \frac{T(E)\,dE}{\sqrt{U-E}}. \tag{12,1}$$

Cosí, dalla conoscenza della funzione $T(E)$, si determina la differenza $x_2(U) - x_1(U)$. Quanto alle funzioni $x_2(U)$ e $x_1(U)$, esse restano indeterminate. Questo significa che esiste non una sola, ma una molteplicità infinita di curve $U = U(x)$ che portano a una data dipendenza del periodo dall'energia e che differiscono l'una dall'altra per deformazioni che non alterano la differenza di due valori di x corrispondenti a uno stesso valore di U.

La molteplicità delle soluzioni scompare se si impone che la curva $U = U(x)$ sia simmetrica rispetto all'asse delle ordinate, cioè

che sia:

$$x_2(U) = -x_1(U) \equiv x(U).$$

In questo caso la formula (12,1) dà per $x(U)$ l'espressione univoca

$$x(U) = \frac{1}{2\pi\sqrt{2m}} \int_0^U \frac{T(E)\,dE}{\sqrt{U-E}}. \tag{12,2}$$

§ 13. *Massa ridotta*

Il problema particolarmente importante del moto di un sistema composto di due particelle interagenti (*problema dei due corpi*) ammette una soluzione completa in forma generale.

Come passo preliminare alla soluzione di questo problema, mostriamo come è possibile semplificarlo sostanzialmente separando il moto del sistema in moto del centro di massa e moto dei punti materiali rispetto a quest'ultimo.

L'energia potenziale d'interazione di due particelle dipende soltanto dalla distanza tra di loro, cioè dal valore assoluto della differenza tra i loro raggi vettori. Perciò la funzione lagrangiana di un tale sistema è:

$$L = \frac{m_1\dot{\mathbf{r}}_1^2}{2} + \frac{m_2\dot{\mathbf{r}}_2^2}{2} - U(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|). \tag{13,1}$$

Sia

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$$

il vettore della distanza che separa i due punti; poniamo l'origine delle coordinate al centro di massa il che ci dà:

$$m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2 = 0.$$

Dalle due ultime uguaglianze otteniamo:

$$\mathbf{r}_1 = \frac{m_2}{m_1+m_2}\mathbf{r}, \quad \mathbf{r}_2 = -\frac{m_1}{m_1+m_2}\mathbf{r}. \tag{13,2}$$

Riportando queste espressioni nella (13.1), otteniamo:

$$L = \frac{m\dot{\mathbf{r}}^2}{2} - U(r), \tag{13,3}$$

dove

$$m = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2} \tag{13,4}$$

è una grandezza chiamata *massa ridotta*. La funzione (13,3) coincide formalmente con la funzione di Lagrange di un punto materiale di massa m che si muove in un campo esterno $U(r)$ simmetrico rispetto all'origine immobile delle coordinate.

Cosí, il problema del moto di due punti materiali interagenti si riduce al problema del moto di un punto materiale in un campo esterno dato $U(r)$. La soluzione $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ di questo problema permette di determinare separatamente, mediante la formula (13,2), le traiettorie $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_1(t)$ e $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_2(t)$ (rispetto al centro di massa) per ciascuna delle due particelle m_1 e m_2.

PROBLEMA

Un sistema è composto di una particella di massa M e di n particelle di massa m. Eliminare il moto del centro di massa e ridurre il problema a quello del moto di n particelle.

Soluzione. Siano $\mathbf{R}$ il raggio vettore della particella M ed $\mathbf{R}_a$ ($a = 1, 2, \ldots, n$) i raggi vettori delle particelle di massa m. Introduciamo le distanze della particella M dalle particelle m

$$\mathbf{r}_a = \mathbf{R}_a - \mathbf{R}$$

e come origine delle coordinate prendiamo il centro di massa:

$$M\mathbf{R} + m\sum_a \mathbf{R}_a = 0.$$

Da queste uguaglianze otteniamo:

$$\mathbf{R} = -\frac{m}{\mu}\sum_a \mathbf{r}_a, \quad \mathbf{R}_a = \mathbf{R} + \mathbf{r}_a,$$

dove $\mu = M + nm$. Riportando queste espressioni nella funzione di Lagrange

$$L = \frac{M\dot{\mathbf{R}}^2}{2} + \frac{m}{2}\sum_a \dot{\mathbf{R}}_a^2 - U,$$

otteniamo:

$$L = \frac{m}{2}\sum_a \mathbf{v}_a^2 - \frac{m^2}{2\mu}\left(\sum_a \mathbf{v}_a\right)^2 - U,$$

dove $\mathbf{v} \equiv \dot{\mathbf{r}}_a$.

L'energia potenziale dipende soltanto dalle distanze tra le particelle e può quindi essere rappresentata come funzione dei vettori $\mathbf{r}_a$.

§ 14. *Moto in un campo centrale*

Nel ridurre il problema del moto dei due corpi al problema del moto di un corpo, ci siamo venuti a trovare di fronte al problema della determinazione del moto di una particella in un campo esterno in cui l'energia potenziale della particella dipende soltanto dalla distanza r da un dato punto fisso; un tale campo è detto *centrale*. La forza

$$\mathbf{F} = -\frac{\partial U(r)}{\partial \mathbf{r}} = -\frac{\partial U}{dr}\frac{\mathbf{r}}{r},$$

agente sulla particella, dipende anch'essa, in valore assoluto, da r ed è diretta in ogni punto come il raggio vettore.

Come già è stato detto nel § 9, durante il moto in un campo centrale il momento angolare del sistema rispetto al centro del campo si conserva. Per una particella questo momento angolare è

$$\mathbf{M} = [\mathbf{rp}].$$

Poiché i vettori **M** ed **r** sono mutuamente perpendicolari, la costanza di **M** significa che durante il moto della particella il suo raggio vettore resta sempre in uno stesso piano perpendicolare ad **M**.

In tal modo la traiettoria di una particella che si muove in un campo centrale giace tutta in un solo piano. Introducendo le coordinate polari r, φ, la funzione di Lagrange assume la forma [vedi (4,5)]:

$$L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - U(r). \qquad (14,1)$$

Questa funzione non contiene in modo esplicito la coordinata φ. Si chiama *ciclica* ogni coordinata generalizzata q_i che non appare in modo esplicito nella funzione di Lagrange. In virtú dell'equazione lagrangiana, per ogni coordinata ciclica q_i si ha:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0,$$

cioè l'impulso generalizzato corrispondente $p_i = \partial L/\partial \dot{q}_i$ è un integrale del moto. Questa circostanza porta ad una semplificazione sostanziale del problema dell'integrazione delle equazioni del moto nel caso in cui esistano le coordinate cicliche.

Nel caso considerato l'impulso generalizzato

$$p_\varphi = mr^2\dot{\varphi}$$

coincide con il momento angolare $M_z = M$ [cfr. (9,6)] e cosí ritroviamo la legge, che già conosciamo, di conservazione del momento angolare

$$M = mr^2\dot{\varphi} = \text{costante}. \qquad (14,2)$$

Notiamo, che per il moto piano di una particella in un campo centrale, questa legge ammette un'interpretazione geometrica semplice. L'espressione $\frac{1}{2}\, r \cdot r\, d\varphi$ rappresenta l area del settore formato dai due raggi vettori infinitamente vicini e da un elemento d'arco della traiettoria (fig. 8). Indicando questa superficie con df, il momento angolare della particella assume la forma:

$$M = 2m\dot{f}, \qquad (14,3)$$

dove la derivata $\dot{f}$ è detta *velocità areolare*. La conservazione del momento angolare implica dunque la costanza della velocità areolare: in uguali intervalli di tempo il raggio vettore della particella in moto descrive aree uguali (*seconda legge di Keplero*[1])).

La soluzione completa del problema del moto di una particella in un campo centrale si ottiene piú semplicemente se si parte dalle

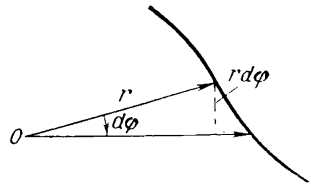


Fig. 8

leggi di conservazione dell'energia e del momento angolare senza neanche scrivere le equazioni stesse del moto. Esprimendo $\dot{\varphi}$ in funzione di M con la (14,2) e riportando questo valore nell'espressione dell'energia, otteniamo:

$$E=\frac{m}{2}(\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2)+U(r)=\frac{m\dot{r}^2}{2}+\frac{M^2}{2mr^2}+U(r). \qquad (14,4)$$

Da cui

$$\dot{r}\equiv\frac{dr}{dt}=\sqrt{\frac{2}{m}[E-U(r)]-\frac{M^2}{m^2r^2}} \qquad (14,5)$$

oppure, separando le variabili ed integrando:

$$t=\int\frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}[E-U(r)]-\frac{M^2}{m^2r^2}}}+\text{costante}. \qquad (14,6)$$

Scrivendo poi la (14,2) nella forma

$$d\varphi=\frac{M}{mr^2}dt,$$

ponendovi dt dalla (14,5) e integrando, otteniamo:

$$\varphi=\int\frac{\frac{M}{r^2}dr}{\sqrt{2m[E-U(r)]-\frac{M^2}{r^2}}}+\text{costante}. \qquad (14,7)$$

Le formule (14,6) e (14,7) danno la soluzione generale del problema posto. La seconda di queste formule determina la relazione tra r e φ, cioè l'equazione della traiettoria. La formula (14,6) determina

[1]) La legge di conservazione del momento angolare per una particelle in moto in un campo centrale si chiama talvolta *integrale delle aree*.

invece, in modo implicito, la distanza r dal centro del punto in moto come funzione del tempo. Notiamo che l'angolo φ varia sempre col tempo in modo monotono: risulta chiaramente dalla (14,2) che $\dot{\varphi}$ non cambia mai di segno.

L'espressione (14,4) mostra che la parte radiale del moto si può considerare come un moto lineare in un campo con energia potenziale « efficace »

$$U_{\text{eff}} = U(r) + \frac{M^2}{2mr^2}. \tag{14,8}$$

La grandezza $M^2/2mr^2$ è detta energia centrifuga. I valori di r per i quali

$$U(r) + \frac{M^2}{2mr^2} = E \tag{14,9}$$

determinano i confini della regione del moto per quanto riguarda la distanza dal centro. Se l'uguaglianza (14,9) è soddisfatta la velocità radiale $\dot{r}$ si annulla. Ciò non significa che la particella si fermi (come avviene in un vero moto unidimensionale), poiché la velocità angolare $\dot{\varphi}$ non si annulla. L'uguaglianza $\dot{r} = 0$ significa un « punto di svolta » della traiettoria in cui la funzione $r(t)$ da crescente diventa decrescente o viceversa.

Se la regione della variazione di r è limitata dalla sola condizione $r \geqslant r_{\min}$, il moto della particella è infinito: la sua traiettoria proviene dall'infinito e torna all'infinito.

Se la regione della variazione di r ha invece due limiti, $r_{\min}$ e $r_{\max}$, il moto è finito e la traiettoria giace interamente in una corona limitata dalle circonferenze $r = r_{\max}$ e $r = r_{\min}$. Ciò non significa, però, che la traiettoria sia necessariamente una curva chiusa. Nell'intervallo di tempo in cui r varia da $r_{\max}$ a $r_{\min}$ e di nuovo a $r_{\max}$, il raggio vettore ruota di un angolo $\Delta\varphi$ che, conformemente alla (14,7), è

$$\Delta\varphi = 2 \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{\frac{M}{r^2}\, dr}{\sqrt{2m(E-U) - \frac{M^2}{r^2}}}. \tag{14,10}$$

Perché la traiettoria sia chiusa è necessario che questo angolo sia una frazione razionale di 2π, sia cioè uguale a $\Delta\varphi = 2\pi m/n$, dove m ed n sono numeri interi. Allora, dopo n ripetizioni di questo periodo di tempo, il raggio vettore del punto, dopo aver fatto m giri completi, riprenderà il suo valore iniziale, cioè la traiettoria si chiude.

Casi di questo genere sono tuttavia eccezionali, e per una forma $U(r)$ arbitraria l'angolo $\Delta\varphi$ non è una frazione razionale di 2π. Per questo la traiettoria di un moto finito generalmente non è chiusa. Essa passa infinite volte alla distanza minima e a quella massima

dal centro (come, per esempio, nella fig. 9), e, in un tempo infinito, ricopre tutta la corona compresa tra le due circonferenze limite.

Esistono soltanto due tipi di campo centrale in cui tutte le traiettorie dei moti finiti sono chiuse. Sono i campi in cui l'energia potenziale della particella è proporzionale a $1/r$ o a r^2. Il primo di questi casi verrà esaminato nel prossimo paragrafo, e il secondo corrisponde al cosiddetto oscillatore spaziale (vedi problema 3 del § 23).

In un punto di svolta, la radice quadrata della (14,5) (cosí come le espressioni integrande nella (14,6) e nella (14,7)) cambia di segno. Se

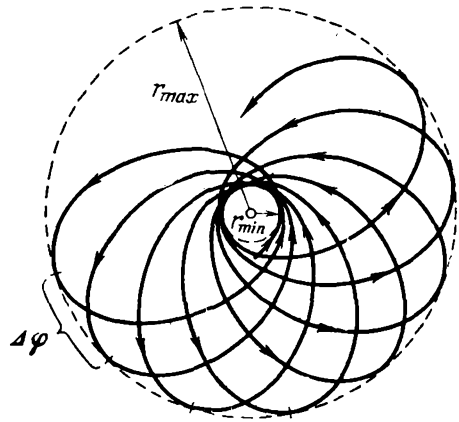


Fig. 9

si misura l'angolo φ a partire dalla direzione di un raggio vettore terminante in un punto di svolta, le porzioni della traiettoria facenti capo, da parti opposte, a questo punto differiranno, per valori di r uguali, solo per il segno di φ; questo significa che la traiettoria è simmetrica rispetto alla direzione indicata. Partendo, per esempio, da uno dei punti $r = r_{max}$, si percorre la porzione di traiettoria fino al punto $r = r_{min}$, poi si ha una porzione disposta simmetricamente fino al successivo punto $r = r_{max}$ e via di seguito; in altre parole, l'intera traiettoria si ottiene ripetendo in andata e in ritorno porzioni uguali. Ciò avviene anche per le traiettorie infinite le quali sono formate da due rami simmetrici che si estendono dal punto di svolta r_{min} fino all'infinito.

L'esistenza di un'energia centrifuga (per un moto in cui $M \neq 0$), tendente all'infinito come $1/r^2$ quando $r \to 0$, rende generalmente impossibile la penetrazione delle particelle nel centro del campo, anche se questo è di per sé stesso un centro d'attrazione. La « caduta » di una particella nel centro è possibile soltanto nel caso in cui l'energia potenziale tende con sufficiente rapidità verso $-\infty$ per $r \to 0$.

Dalla disuguaglianza

$$\frac{m\dot{r}^2}{2} = E - U(r) - \frac{M^2}{2mr^2} > 0$$

o

$$r^2 U(r) + \frac{M^2}{2m} < Er^2$$

segue che r può prendere valori tendenti a zero soltanto se

$$r^2 U(r)\,|_{r\to 0} < -\frac{M^2}{2m}, \tag{14,11}$$

cioè $U(r)$ deve tendere verso $-\infty$ come $-\alpha/r^2$ dove $\alpha > M^2/2m$, oppure proporzionalmente a $-1/r^n$ dove $n > 2$.

PROBLEMI

1. Integrare le equazioni del moto di un pendolo sferico, cioè di un punto materiale m che si muove sulla superficie di una sfera di raggio l in un campo di gravità.

Soluzione. In coordinate sferiche, ponendo origine nel centro della sfera e dirigendo l'asse polare verticalmente verso il basso, la funzione di Lagrange del pendolo è

$$L = \frac{ml^2}{2}(\dot{\theta}^2 + \operatorname{sen}^2\theta\cdot\dot{\varphi}^2) + mgl\cos\theta.$$

La coordinata φ è ciclica, e perciò l'impulso generalizzato p_φ, che coincide con la componente z del momento angolare, si conserva:

$$ml^2 \operatorname{sen}^2\theta\cdot\dot{\varphi} = M_z = \text{costante}. \tag{1}$$

L'energia è

$$E = \frac{ml^2}{2}(\dot{\theta}^2 + \operatorname{sen}^2\theta\cdot\dot{\varphi}^2) - mgl\cos\theta = \frac{ml^2\dot{\theta}^2}{2} + \frac{M_z^2}{2ml^2\operatorname{sen}^2\theta} - mgl\cos\theta. \tag{2}$$

Ricavando di qui $\dot{\theta}$ e separando le variabili, si ottiene:

$$t = \int \frac{d\theta}{\sqrt{\frac{2}{ml^2}[E - U_{\text{eff}}(\theta)]}}, \tag{3}$$

dove è stata introdotta « l'energia potenziale efficace »

$$U_{\text{eff}}(\theta) = \frac{M_z^2}{2ml^2\operatorname{sen}^2\theta} - mgl\cos\theta.$$

Utilizzando la (1), troviamo per l'angolo φ:

$$\varphi = \frac{M_z}{l\sqrt{2m}} \int \frac{d\theta}{\operatorname{sen}^2\theta\sqrt{E - U_{\text{eff}}(\theta)}}. \tag{4}$$

Gli integrali (3) e (4) si riducono ad integrali ellittici di prima e di terza specie, rispettivamente.

La regione del moto per l'angolo θ è determinata dalla condizione $E > U_{eff}$, ed i suoi limiti si trovano dall'equazione $E = U_{eff}$. Quest'ultima è un'equazione di terzo grado in $\cos\theta$, avente due radici nell'intervallo compreso tra -1 e $+1$; queste radici determinano la posizione di due circonferenze parallele sulla sfera tra le quali è compresa tutta la traiettoria.

2. Integrare le equazioni del moto di un punto materiale che si muove sulla superficie di un cono (angolo al vertice è 2α), posto verticalmente con il vertice verso il basso, in un campo di gravità.

Soluzione. In coordinate sferiche (origine nel vertice del cono ed asse polare diretto verticalmente verso l'alto) la funzione di Lagrange è

$$L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2 \operatorname{sen}^2\alpha \cdot \dot{\varphi}^2) - mgr\cos\alpha.$$

La coordinata φ è ciclica e perciò anche in questo caso si conserva la grandezza

$$M_z = mr^2 \operatorname{sen}^2\alpha \cdot \dot{\varphi}.$$

L'energia è

$$E = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{M_z^2}{2mr^2 \operatorname{sen}^2\alpha} + mgr\cos\alpha.$$

Analogamente al procedimento usato per il problema 1, troviamo:

$$t = \int \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}[E - U_{eff}(r)]}},$$

$$\varphi = \frac{M_z}{\operatorname{sen}^2\alpha\sqrt{2m}} \int \frac{dr}{r^2\sqrt{E - U_{eff}(r)}},$$

$$U_{eff}(r) = \frac{M_z^2}{2mr^2 \operatorname{sen}^2\alpha} + mgr\cos\alpha.$$

La condizione $E = U_{eff}(r)$ rappresenta (per $M_z \neq 0$) un'equazione di terzo grado in r avente due radici positive; queste radici determinano la posizione di due circonferenze orizzontali sulla superficie del cono tra le quali è compresa la traiettoria.

3. Integrare le equazioni del moto di un pendolo piano il cui punto di sospensione (di massa m_1) può spostarsi orizzontalmente (vedi fig. 2).

Soluzione. Nella funzione di Lagrange, trovata nel problema 2 del § 5, la coordinata x è ciclica. Per questo, si conserva l'impulso generalizzato P_x che coincide con la componente orizzontale dell'impulso totale del sistema:

$$P_x = (m_1 + m_2)\dot{x} + m_2 l\dot{\varphi}\cos\varphi = \text{costante}. \tag{1}$$

Si può sempre considerare il sistema come un insieme che persevera in quiete; in questo caso, la costante è nulla e l'integrazione dell'equazione (1) dà la relazione

$$(m_1 + m_2)\,x + m_2 l \operatorname{sen}\varphi = \text{costante}, \tag{2}$$

che esprime l'immobilità del centro di massa del sistema nella direzione orizzontale. Partendo dalla (1), si ottiene l'energia nella forma

$$E = \frac{m_2 l^2 \dot{\varphi}^2}{2}\left(1 - \frac{m_2}{m_1 + m_2}\cos^2\varphi\right) - m_2 g l\cos\varphi. \tag{3}$$

Donde

$$t = l\sqrt{\frac{m_2}{2(m_1+m_2)}}\int\sqrt{\frac{m_1+m_2\,\mathrm{sen}^2\,\varphi}{E+m_2gl\cos\varphi}}\,d\varphi.$$

Esprimendo mediante la (2) le coordinate $x_2 = x + l\,\mathrm{sen}\,\varphi$, ed $y_2 = l\cos\varphi$ della particella m_2 in funzione di φ, troviamo che la traiettoria di questa particella rappresenta un arco d'ellisse con semiasse orizzontale uguale a $lm_1/(m_1+m_2)$ e semiasse verticale uguale a l. Quando $m_1 \to \infty$, si ritrova l'usuale pendolo matematico oscillante secondo un arco di circonferenza.

§ 15. *Il problema di Keplero*

L'esempio piú importante di campi centrali è quello di un campo in cui l'energia potenziale è inversamente proporzionale ad r e, rispettivamente, le forze sono inversamente proporzionali a r^2. È il

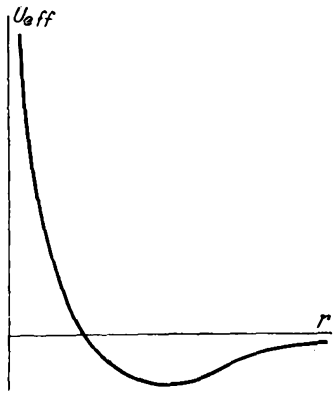


Fig. 10

caso dei campi newtoniani di gravità e dei campi coulombiani elettrostatici. I primi, come è noto, hanno carattere attrattivo, e secondi possono essere sia attrattivi che repulsivi.

Consideriamo anzitutto un campo d'attrazione in cui

$$U = -\frac{\alpha}{r} \tag{15,1}$$

dove la costante α e positiva. Il grafico dell'energia potenziale « efficace »

$$U_{\mathrm{eff}} = -\frac{\alpha}{r} + \frac{M^2}{2mr^2} \tag{15,2}$$

è della forma indicata nella fig. 10. Per $r \to 0$, essa tende verso $+\infty$, e per $r \to \infty$ tende a zero per valori negativi; per $r = M^2/\alpha m$ essa

ha un minimo uguale a

$$(U_{\text{eff}})_{\min} = -\frac{\alpha^2 m}{2M^2}. \tag{15,3}$$

Risulta direttamente da questo grafico che per $E > 0$ il moto della particella sarà infinito, e finito per $E < 0$.

La forma della traiettoria è determinata dalla formula generale (14,7). Riportando in essa $U = -\frac{\alpha}{r}$ ed eseguendo un'integrazione elementare, si ottiene:

$$\varphi = \arccos \frac{\frac{M}{r} - \frac{m\alpha}{M}}{\sqrt{2mE + \frac{m^2\alpha^2}{M^2}}} + \text{costante}.$$

Scegliendo l'origine dell'angolo φ in modo tale che la costante sia nulla e introducendo le notazioni

$$p = \frac{M^2}{m\alpha}, \quad e = \sqrt{1 + \frac{2EM^2}{m\alpha^2}}, \tag{15,4}$$

possiamo scrivere la formula della traiettoria come segue:

$$\frac{p}{r} = 1 + e\cos\varphi. \tag{15,5}$$

Questa è l'equazione di una sezione conica avente per fuoco l'origine delle coordinate; p ed e sono detti rispettivamente *parametro* e *eccentricità* dell'orbita. Come si vede dalla (15,5), la scelta dell'origine di φ è tale che il punto in cui $\varphi = 0$ è il piú vicino al centro (questo punto è detto *perielio* dell'orbita).

Nel problema equivalente dei due corpi interagenti secondo la legge (15,1), l'orbita di ciascuna delle particelle rappresenta una sezione conica avente per fuoco il centro di massa comune.

Dalla (15,4) si vede che per $E < 0$ l'eccentricità è minore di 1, cioè l'orbita è un'ellisse (fig. 11) e il moto è finito conformemente a quanto detto all'inizio di questo paragrafo. Secondo note formule della geometria analitica, il semiasse maggiore a e il semiasse minore b sono dati da

$$a = \frac{p}{1-e^2} = \frac{\alpha}{2|E|}, \quad b = \frac{p}{\sqrt{1-e^2}} = \frac{M}{\sqrt{2m|E|}}. \tag{15,6}$$

Il valore minimo ammissibile dell'energia coincide con la (15,3), e in questo caso si ha $e = 0$, cioè l'ellisse si trasforma in un cerchio. Notiamo che il semiasse maggiore dell'ellisse dipende soltanto dall'energia (e non dal momento angolare) della particella. Le distanze minima e massima dal centro del campo (fuoco dell'ellisse) sono

$$r_{\min} = \frac{p}{1+e} = a(1-e), \quad r_{\max} = \frac{p}{1-e} = a(1+e). \tag{15,7}$$

Queste espressioni (con a ed e sostituite mediante la (15,6) e la (15,4)) si potrebbero evidentemente ottenere direttamente come radici dell'equazione $U_{\text{eff}}(r) = E$.

È comodo determinare il tempo di rivoluzione sull'orbita ellittica, cioè il periodo del moto T, per mezzo della legge di conservazione

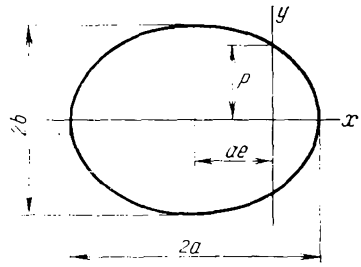


Fig. 11

del momento angolare nella forma dell'« integrale delle aree » (14,3). Integrando questa uguaglianza rispetto al tempo da zero a T, si ottiene:

$$2mf = TM,$$

dove f è l'area racchiusa dall'orbita. Per l'ellisse $f = \pi ab$, e mediante le formule (15,6) si ottiene:

$$T = 2\pi a^{3/2}\sqrt{\frac{m}{\alpha}} = \pi\alpha\sqrt{\frac{m}{2|E|^3}}. \qquad (15,8)$$

Il fatto che il quadrato del periodo dovesse essere proporzionale al cubo delle dimensioni lineari dell'orbita era già stato mostrato nel § 10. Notiamo ancora che il periodo dipende solo dall'energia della particella.

Per $E \geqslant 0$ il moto è infinito. Se $E > 0$, l'eccentricità $e > 1$, cioè la traiettoria è un'iperbole che contorna il centro del campo (fuoco), come è indicato nella fig. 12. La distanza del perielio dal centro è

$$r_{\min} = \frac{p}{e+1} = a(e-1), \qquad (15,9)$$

dove

$$a = \frac{p}{e^2-1} = \frac{\alpha}{2E}$$

è il « semiasse » dell'iperbole.

Se invece $E = 0$, l'eccentricità $e = 1$, la particella percorre una parabola con distanza di perielio $r_{\min} = p/2$. Questo caso si ha allorché la particella comincia il suo moto da uno stato di quiete all'infinito.

La relazione tra le coordinate di una particella in moto su un'orbita e il tempo può essere trovata con l'aiuto della formula generale

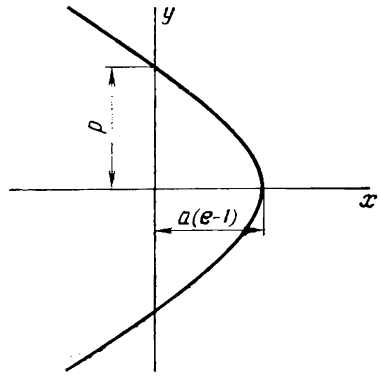


Fig. 12

(14,6). Per essa esiste una forma parametrica piú comoda a cui si può giungere nel modo seguente.

Consideriamo anzitutto orbite ellittiche. Sostituendo a ed e secondo la (15,4) e la (15,6), scriviamo l'integrale (14,6), che determina il tempo, nella forma

$$t=\sqrt{\frac{m}{2|E|}}\int\frac{r\,dr}{\sqrt{-r^2+\frac{\alpha}{|E|}r-\frac{M^2}{2m|E|}}}=\sqrt{\frac{ma}{\alpha}}\int\frac{r\,dr}{\sqrt{a^2e^2-(r-a)^2}}.$$

Eseguendo la sostituzione

$$r-a=-ae\cos\xi,$$

questo integrale assume la forma

$$t=\sqrt{\frac{ma^3}{\alpha}}\int(1-e\cos\xi)\,d\xi=\sqrt{\frac{ma^3}{\alpha}}(\xi-e\operatorname{sen}\xi)+\text{costante}.$$

Scegliendo l'origine dei tempi in modo tale da annullare la costante, si ottiene infine la seguente rappresentazione parametrica della relazione tra r e t:

$$r=a(1-e\cos\xi),\quad t=\sqrt{\frac{ma^3}{\alpha}}(\xi-e\operatorname{sen}\xi)\qquad(15,10)$$

(nell'istante $t=0$ la particella si trova nel suo perielio). Mediante lo stesso parametro ξ si possono esprimere anche le coordinate cartesiane della particella $x=r\cos\varphi$, $y=r\operatorname{sen}\varphi$ (gli assi x ed y sono diretti rispettivamente lungo i semiassi maggiore e minore dell'ellis-

se). Dalle (15,5) e (15,10) otteniamo

$$ex = p - r = a(1 - e^2) - a(1 - e\cos\xi) = ae(\cos\xi - e),$$

e troviamo $y = \sqrt{r^2 - x^2}$. Infine abbiamo:

$$x = a(\cos\xi - e), \quad y = a\sqrt{1 - e^2}\,\mathrm{sen}\,\xi. \tag{15,11}$$

Ad una rivoluzione completa sull'ellisse corrisponde una variazione del parametro ξ da 0 a 2π.

Calcoli del tutto analoghi ci portano ai seguenti risultati per le traiettorie iperboliche:

$$\begin{aligned} r &= a(e\,\mathrm{ch}\,\xi - 1), \quad t = \sqrt{\frac{ma^3}{\alpha}}(e\,\mathrm{sh}\,\xi - \xi), \\ x &= a(e - \mathrm{ch}\,\xi), \quad y = a\sqrt{e^2 - 1}\,\mathrm{sh}\,\xi, \end{aligned} \tag{15,12}$$

dove il parametro ξ assume tutti i valori compresi tra $-\infty$ e $+\infty$.

Consideriamo ora il moto in un campo di repulsione dove

$$U = \frac{\alpha}{r} \tag{15,13}$$

($\alpha > 0$). In questo caso l'energia potenziale efficace

$$U_{\text{eff}} = \frac{\alpha}{r} + \frac{M^2}{2mr^2}$$

decresce in modo monotono da $+\infty$ a zero, quando r varia da zero ad ∞. L'energia della particella non può essere che positiva, ed il

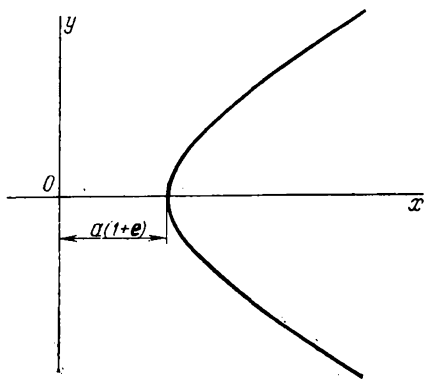


Fig. 13

moto è sempre infinito. Tutti i calcoli per questo caso sono precisamente analoghi a quelli eseguiti sopra. La traiettoria è un'iperbole

$$\frac{p}{r} = -1 + e\cos\varphi \tag{15,14}$$

[p ed e sono determinate dalle formule (15,4)]. Essa passa vicino al centro del campo, come è indicato nella fig. 13. La distanza del peri-

elio è

$$r_{\min} = \frac{p}{e-1} = a(e+1) \tag{15,15}$$

La dipendenza dal tempo è determinata dalle equazioni parametriche

$$\begin{gathered} r = a(e\,\mathrm{ch}\,\xi + 1), \quad t = \sqrt{\frac{ma^3}{\alpha}}\,(e\,\mathrm{sh}\,\xi + \xi), \\ x = a(\mathrm{ch}\,\xi + e), \quad y = a\sqrt{e^2-1}\,\mathrm{sh}\,\xi. \end{gathered} \tag{15,16}$$

Concludendo questo paragrafo mostriamo che per il moto in un campo $U = \alpha/r$ (dove il segno di α è arbitrario) esiste un integrale del moto specifico di questo campo. È facile verificare con un calcolo diretto che l'espressione

$$[\mathbf{vM}] + \frac{\alpha\mathbf{r}}{r} = \text{costante}. \tag{15,17}$$

Infatti, la sua derivata totale rispetto al tempo è

$$[\dot{\mathbf{v}}\mathbf{M}] + \frac{\alpha\mathbf{v}}{r} - \frac{\alpha\mathbf{r}(\mathbf{vr})}{r^3},$$

o, sostituendo $\mathbf{M} = m[\mathbf{rv}]$:

$$m\mathbf{r}(\mathbf{v}\dot{\mathbf{v}}) - m\mathbf{v}(\mathbf{r}\dot{\mathbf{v}}) + \frac{\alpha\mathbf{v}}{r} - \frac{\alpha\mathbf{r}(\mathbf{vr})}{r^3};$$

ponendovi, secondo le equazioni del moto, $m\dot{\mathbf{v}} = \alpha\mathbf{r}/r^3$, vedremo che alla fine questa espressione si annulla.

Il vettore conservativo (15,17) è diretto lungo l'asse maggiore dal fuoco al perielio e la sua grandezza è uguale ad αe. Questo è facilmente verificabile considerando il suo valore nel perielio.

Sottolineiamo che l'integrale del moto (15,17), come anche gli integrali M ed E, è una funzione monodroma dello stato (posizione e velocità) della particella. Vedremo nel § 50 che la comparsa di questo integrale monodromo supplementare è dovuta alla cosiddetta degenerazione del moto.

PROBLEMI

1. Trovare la relazione tra le coordinate ed il tempo per una particella che si muove in un campo $U = -\alpha/r$ con energia $E = 0$ (secondo una parabola).

Soluzione. Nell'integrale

$$t = \int \frac{r\,dr}{\sqrt{\frac{2\alpha}{m}r - \frac{M^2}{m^2}}}$$

sostituiamo

$$r = \frac{M^2}{2m\alpha}(1+\eta^2) = \frac{p}{2}(1+\eta^2)$$

e otteniamo la seguente rappresentazione parametrica della relazione cercata:

$$r=\frac{p}{2}(1+\eta^2),\quad t=\sqrt{\frac{mp^3}{\alpha}}\,\frac{\eta}{2}\left(1+\frac{\eta^2}{3}\right),$$

$$x=\frac{p}{2}(1-\eta^2),\quad y=p\eta.$$

Il parametro η assume tutti i valori da $-\infty$ a $+\infty$.

2. Integrare le equazioni del moto di un punto materiale in un campo centrale $U=-\alpha/r^2$, $\alpha>0$.

Soluzione. Secondo le formule (14,6), (14,7), e scegliendo opportunamente le origini di calcolo per φ e t, troviamo:

$$\text{a) per } E>0,\quad \frac{M^2}{2m}>\alpha\quad \frac{1}{r}=\sqrt{\frac{2mE}{M^2-2m\alpha}}\cos\left[\varphi\sqrt{1-\frac{2m\alpha}{M^2}}\right],$$

$$\text{b) per } E>0,\quad \frac{M^2}{2m}<\alpha\quad \frac{1}{r}=\sqrt{\frac{2mE}{2m\alpha-M^2}}\,\mathrm{sh}\left[\varphi\sqrt{\frac{2m\alpha}{M^2}-1}\right],$$

$$\text{c) per } E<0,\quad \frac{M^2}{2m}<\alpha\quad \frac{1}{r}=\sqrt{\frac{2m\,|E|}{2m\alpha-M^2}}\,\mathrm{ch}\left[\varphi\sqrt{\frac{2m\alpha}{M^2}-1}\right].$$

In tutti i tre casi

$$t=\frac{1}{E}\sqrt{\frac{m}{2}}\sqrt{Er^2-\frac{M^2}{2m}+\alpha}.$$

Nei casi b) e c) la particella « cade » nel centro seguendo una traiettoria che si avvicina all'origine delle coordinate allorché $\varphi\to\infty$. La caduta a partire da una distanza data r avviene in un tempo finito uguale a

$$\frac{1}{E}\sqrt{\frac{m}{2}}\left\{\sqrt{\alpha-\frac{M^2}{2m}+Er^2}-\sqrt{\alpha-\frac{M^2}{2m}}\right\}.$$

3. Aggiungendo all'energia potenziale $U=-\alpha/r$ un valore piccolo $\delta U(r)$, le traiettorie di un moto finito cessano di essere chiuse e per ogni giro il perielio dell'orbita si sposta di un piccolo angolo $\delta\varphi$. Determinare questa grandezza angolare $\delta\varphi$ per a) $\delta U=\beta/r^2$ e b) $\delta U=\gamma/r^3$.

Soluzione. Quando r varia da $r_{\min}$ a $r_{\max}$ e nuovamente ad $r_{\min}$, l'angolo $\delta\varphi$ cambia di una grandezza data dalla formula (14,10) che scriviamo nella forma

$$\Delta\varphi=-2\frac{\partial}{\partial M}\int_{r_{\min}}^{r_{\max}}\sqrt{2m(E-U)-\frac{M^2}{r^2}}\,dr$$

(allo scopo di evitare piú in basso una fittizia divergenza dell'integrale). Poniamo $U=-\alpha/r+\delta U$ e sviluppiamo l'espressione sotto il segno d'integrale secondo le potenze di δU; il termine d'ordine zero dello sviluppo dà 2π, ed il termine del primo ordine dà lo spostamento cercato $\delta\varphi$:

$$\delta\varphi=\frac{\partial}{\partial M}\int_{r_{\min}}^{r_{\max}}\frac{2m\delta U\cdot dr}{\sqrt{2m\left(E+\frac{\alpha}{r}\right)-\frac{M^2}{r^2}}}=\frac{\partial}{\partial M}\left(\frac{2m}{M}\int_0^{\pi}r^2\delta U\,d\varphi\right),\qquad(1)$$

dove dall'integrazione in dr noi siamo passati all'integrazione in $d\varphi$ lungo la traiettoria del moto « imperturbato ».

Nel caso a) l'integrazione nella (1) è banale e dà

$$\delta\varphi = -\frac{2\pi\beta m}{M^2} = -\frac{2\pi\beta}{\alpha p}$$

[p è il parametro dell'ellisse imperturbata dato dalla (15,4)]. Nel caso b) $r^2\delta U = \gamma/r$, e sostituendo $1/r$ dalla (15,5), otteniamo:

$$\delta\varphi = -\frac{6\pi\alpha\gamma m^2}{M^4} = -\frac{6\pi\gamma}{\alpha p^2}\,.$$

Capitolo IV

URTI DI PARTICELLE

§ 16. *Disintegrazione di particelle*

Le leggi di conservazione dell'impulso e dell'energia già di per sé permettono di trarre, in numerosi casi, una serie di importanti conclusioni sulle proprietà dei diversi processi meccanici. Il fatto essenziale è che queste proprietà non dipendono affatto dal tipo concreto dell'interazione fra le particelle impegnate nel processo.

Cominciamo dal processo di disintegrazione « spontanea » (non provocata cioè da forze esterne) di una particella in due « parti componenti », cioè in due altre particelle che si muovono, dopo la disintegrazione, indipendentemente l'una dall'altra.

Questo processo ha un aspetto molto semplice, se lo si considera in un sistema di riferimento in cui la particella (prima della disintegrazione) perseverava in quiete. In forza della legge di conservazione dell'impulso, la somma degli impulsi delle due particelle formatesi nella disintegrazione è pure uguale a zero, cioè le particelle si allontanano l'una dall'altra con impulsi uguali in grandezza e opposti in verso. Il loro valore assoluto comune (indichiamolo con p_0) è determinato dalla legge di conservazione dell'energia

$$E_{\text{int}} = E_{1\text{int}} + \frac{p_0^2}{2m_1} + E_{2\text{int}} + \frac{p_0^2}{2m_2},$$

dove m_1 ed m_2 sono le masse delle particelle, $E_{1\text{int}}$ ed $E_{2\text{int}}$ le loro energie interne, ed E_{int} l'energia interna della particella iniziale (che disintegra). Indichiamo con ε l'« energia di disintegrazione » cioè la differenza

$$\varepsilon = E_{\text{int}} - E_{1\text{int}} - E_{2\text{int}} \tag{16,1}$$

(è evidente che questa grandezza dev'essere positiva perché la disintegrazione sia in generale possibile). Si ha allora:

$$\varepsilon = \frac{p_0^2}{2}\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right) = \frac{p_0^2}{2m}, \tag{16,2}$$

da cui si può ricavare p_0 (m è la massa ridotta delle due particelle); le loro velocità sono $v_{10} = p_0/m_1$, $v_{20} = p_0 m_2$.

Passiamo ora ad un sistema di riferimento nel quale la particella iniziale si muove prima della disintegrazione con velocità V. Questo sistema si chiama di solito sistema di laboratorio (o sistema « l ») a differenza del « sistema del centro di massa » (o sistema « c ») nel quale l'impulso totale è nullo. Consideriamo una delle particelle di

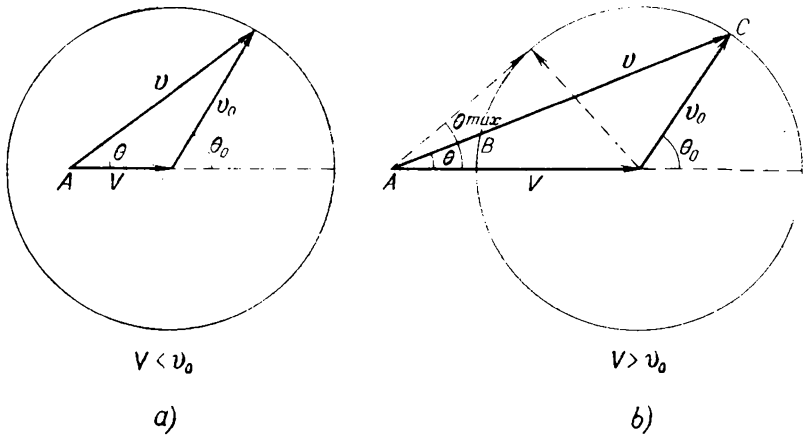


Fig. 14

disintegrazione, e siano $\mathbf{v}$ e $\mathbf{v}_0$ le sue velocità rispettivamente nei sistemi « l » e « c ». L'evidente uguaglianza $\mathbf{v} = \mathbf{V} + \mathbf{v}_0$, oppure $\mathbf{v} - \mathbf{V} = \mathbf{v}_0$, ci dà:

$$v^2 + V^2 - 2vV\cos\theta = v_0^2, \tag{16,3}$$

dove θ è l'angolo della direzione del moto della particella rispetto alla direzione della velocità $\mathbf{V}$. Questa equazione determina la relazione tra la velocità della particella di disintegrazione e la direzione della sua traiettoria nel sistema « l ». Essa può essere rappresentata graficamente per mezzo del diagramma dato nella fig. 14. La velocità $\mathbf{v}$ è data da un vettore tracciato dal punto A distante di V dal centro della circonferenza di raggio v_0 ad un punto qualsiasi della circonferenza stessa [1]). Le figure 14 *a* e *b* corrispondono ai casi $V < v_0$ e $V > v_0$ rispettivamente. Nel primo caso la particella può allontanarsi ad un angolo θ qualsiasi. Nel secondo caso essa può muoversi soltanto in avanti e ad un angolo θ non maggiore del valore θ_{max} dato dall'uguaglianza

$$\operatorname{sen}\theta_{max} = \frac{v_0}{V} \tag{16,4}$$

(direzione della tangente al cerchio tracciata dal punto A).

[1]) Piú precisamente: ad un punto qualsiasi della sfera di raggio v_0, di cui il cerchio disegnato nella fig. 14 rappresenta una sezione massima.

Il legame fra gli angoli di volo θ e θ_0 nei sistemi l e c appare evidente dal diagramma ed è dato dalla formula

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{v_0 \operatorname{sen}\theta_0}{v_0 \cos\theta_0 + V}. \tag{16,5}$$

Risolvendo questa equazione rispetto a $\cos\theta_0$, si ottiene dopo trasformazioni elementari

$$\cos\theta_0 = -\frac{V}{v_0}\operatorname{sen}^2\theta \pm \cos\theta\sqrt{1-\frac{V^2}{v_0^2}\operatorname{sen}^2\theta}. \tag{16,6}$$

Se $v_0 > V$, il legame tra θ_0 e θ è univoco, come segue dalla figura 14, *a*. Nella formula (16,6) occorre allora prendere il segno piú davanti alla radice (perché si abbia $\theta_0 = 0$ per $\theta = 0$). Se invece $v_0 < V$ il legame tra θ_0 e θ non è piú univoco: per ogni valore di θ si hanno due valori di θ_0 corrispondenti (fig. 14, *b*) ai vettori $\mathbf{v}_0$ tracciati dal centro del cerchio ai punti B o C; a questi vettori corrispondono i due segni davanti alla radice nella (16,6).

Nelle applicazioni fisiche si ha a che fare usualmente con la disintegrazione non di una, ma di piú particelle uguali, ciò che pone il problema di distribuzione delle particelle di disintegrazione secondo la direzione, l'energia, ecc. Pertanto partiremo dall'ipotesi che le particelle iniziali siano orientate caoticamente nello spazio, cioè che la loro orientazione sia in media isotropa.

Nel sistema c la soluzione del problema è banale: tutte le particelle di disintegrazione (di uno stesso tipo) hanno la stessa energia e la distribuzione delle loro direzioni di volo è isotropa. Quest'ultima affermazione è dovuta alla nostra ipotesi sull'orientazione caotica delle particelle iniziali. Essa significa che il numero di particelle che passano per un elemento d'angolo solido do_0 è proporzionale alla grandezza di questo elemento, cioè uguale a $\frac{do_0}{4\pi}$. Di qui otteniamo la distribuzione secondo gli angoli θ_0, ponendo $do_0 = 2\pi \operatorname{sen}\theta_0\, d\theta_0$, cioè

$$\frac{1}{2}\operatorname{sen}\theta_0\, d\theta_0. \tag{16,7}$$

Le distribuzioni nel sistema l si ottengono per mezzo di un'adeguata trasformazione di questa espressione. Determiniamo, ad esempio, la distribuzione rispetto all'energia cinetica nel sistema l. Elevando al quadrato l'uguaglianza $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{V}$, abbiamo:

$$v^2 = v_0^2 + V^2 + 2v_0 V\cos\theta_0,$$

donde

$$d\cos\theta_0 = \frac{d(v^2)}{2v_0 V}.$$

Introducendo qui l'energia cinetica $T = mv^2/2$ (dove m sta per m_1 o m_2, secondo il tipo di particella di disintegrazione che si considera)

e sostituendo nella (16,7), otteniamo la distribuzione cercata

$$\frac{dT}{2mv_0V}. \tag{16,8}$$

L'energia cinetica può assumere tutti i valori compresi fra il minimo $T_{\min} = \frac{m}{2}(v_0 - V)^2$ e il massimo $T_{\max} = \frac{m}{2}(v_0 + V)^2$. In questo intervallo le particelle sono distribuite uniformemente, secondo la (16,8).

Nella disintegrazione di una particella in piú di due parti componenti, le leggi di conservazione dell'impulso e dell'energia lasciano, naturalmente, un'arbitrarietà nelle velocità e nelle direzioni delle particelle di disintegrazione considerevolmente maggiore che nel caso della disintegrazione in due componenti. In particolare, le energie delle particelle di disintegrazione non prendono nel sistema c un determinato valore. Esiste però un limite superiore dell'energia cinetica che ognuna particella di disintegrazione può portarsi via.

Per determinare questo limite, consideriamo l'insieme di tutte le particelle di disintegrazione ad eccezione di una (di massa m_1) come un unico sistema; sia E'_{int} la sua energia « interna ». Allora l'energia cinetica della particella m_1 sarà, secondo la (16,1) e la (16,2),

$$T_{10} = \frac{p_0^2}{2m_1} = \frac{M - m_1}{M}(E_{\text{int}} - E_{1\text{int}} - E'_{\text{int}})$$

(M è la massa della particella iniziale). È evidente che T_{10} assumerà il valore massimo possibile quando E'_{int} sarà minima. Per questo occorre che tutte le particelle di disintegrazione, esclusa la particella m_1, si muovano con la stessa velocità; allora E'_{int} si riduce semplicemente alla somma delle loro energie interne, e la differenza $E_{\text{int}} - E_{1\text{int}} - E'_{\text{int}}$ è l'energia di disintegrazione ε. Quindi

$$(T_{10})_{\max} = \frac{M - m_1}{M}\varepsilon. \tag{16,9}$$

PROBLEMI

1. Trovare la relazione tra gli angoli θ_1 e θ_2 (nel sistema l) sotto i quali si allontanano le particelle dopo una disintegrazione in due componenti.

Soluzione. Nel sistema c gli angoli di volo delle due particelle sono legati da $\theta_{10} = \pi - \theta_{20}$. Indicando θ_{10} semplicemente con θ_0 ed applicando la formula (16,5) a ciascuna delle due particelle, otteniamo:

$$V + v_{10}\cos\theta_0 = v_{10}\operatorname{sen}\theta_0 \operatorname{ctg}\theta_1,$$
$$V - v_{20}\cos\theta_0 = v_{20}\operatorname{sen}\theta_0 \operatorname{ctg}\theta_2.$$

Da queste due uguaglianze è necessario eliminare θ_0. Per fare questo, ricaviamo anzitutto da esse $\cos\theta_0$ e $\operatorname{sen}\theta_0$ e scriviamo la somma $\cos^2\theta_0 + \operatorname{sen}^2\theta_0 = 1$. Tenendo conto anche che $v_{10}/v_{20} = m_2/m_1$ ed usando la (16,2), troviamo infine

la seguente equazione:

$$\frac{m_2}{m_1}\operatorname{sen}^2\theta_2+\frac{m_1}{m_1}\operatorname{sen}^2\theta_1-2\operatorname{sen}\theta_1\operatorname{sen}\theta_2\cos(\theta_1+\theta_2)=\frac{2\varepsilon}{(m_1+m_2)V^2}\operatorname{sen}^2(\theta_1+\theta_2).$$

2. Trovare nel sistema l la distribuzione delle particelle di disintegrazione secondo le direzioni.

Soluzione. Per $v_0 > V$ sostituiamo la (16,6) con il segno + davanti alla radice nella (16,7) ed otteniamo la distribuzione cercata nella forma

$$\frac{\operatorname{sen}\theta\, d\theta}{2}\left[2\frac{V}{v_0}\cos\theta+\frac{1+\frac{V^2}{v_0^2}\cos 2\theta}{\sqrt{1-\frac{V^2}{v_0^2}\operatorname{sen}^2\theta}}\right]\qquad(0\leqslant\theta\leqslant\pi).$$

Per $v_0 < V$ bisogna tener conto delle due relazioni possibili tra θ_0 e θ. Poiché se θ aumenta uno dei valori corrispondenti di θ_0 cresce e l'altro decresce, è necessario prendere la differenza (e non la somma) delle due espressioni di $d\cos\theta_0$ con i due segni davanti alla radice nella (16,6). Tralasciando i passaggi intermedi, scriviamo la formula finale

$$\operatorname{sen}\theta\, d\theta\,\frac{1+\frac{V^2}{v_0^2}\cos 2\theta}{\sqrt{1-\frac{V^2}{v_0^2}\operatorname{sen}^2\theta}}\qquad(0\leqslant\theta\leqslant\theta_{\max}).$$

3. Determinare nel sistema l l'intervallo dei valori che può prendere l'angolo θ formato dalle direzioni delle traiettorie di due particelle generate in una disintegrazione.

Soluzione. L'angolo θ è la somma $\theta_1+\theta_2$ degli angoli definiti dalla formula (16,5) (vedi problema 1); la cosa piú semplice nel caso considerato è di calcolare la tangente di questo angolo. L'analisi degli estremi dell'espressione ottenuta dà i seguenti intervalli dei valori possibili di θ in funzione della velocità relativa V e di v_{10} e v_{20} (poniamo sempre $v_{20} > v_{10}$):

$$0<\theta<\pi \text{ se } v_{10}<V<v_{20};$$

$$\pi-\theta_m<\theta<\pi \text{ se } V<v_{10};$$

$$0<\theta<\theta_m \text{ se } V>v_{20},$$

dove il valore θ_m è dato dalla formula

$$\operatorname{sen}\theta_m=\frac{V(v_{10}+v_{20})}{V^2+v_{10}v_{20}}.$$

§ 17. *Urto elastico di particelle*

L'urto di due particelle è detto elastico se esso non comporta modificazioni del loro stato interno. Perciò, quando si applica la legge di conservazione dell'energia ad un urto di questo tipo, si può non tener conto dell'energia interna delle particelle.

La descrizione matematica dell'urto assume un'espressione piú semplice in un sistema di riferimento dove il centro di massa di ambedue le particelle sia in quiete (sistema c); come nel paragrafo precedente, useremo l'indice 0 per denotare i valori delle grandezze

in questo sistema. Le velocità delle particelle prima dell'urto nel sistema c sono legate con le loro velocità $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ nel sistema di laboratorio dalle relazioni

$$\mathbf{v}_{10} = \frac{m_2}{m_1+m_2}\mathbf{v}, \quad \mathbf{v}_{20} = -\frac{m_1}{m_1+m_2}\mathbf{v},$$

dove $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$ [cfr. (13,2)].

In virtú della legge di conservazione dell'impulso, gli impulsi di ambedue le particelle restano dopo l'urto uguali in grandezza ed opposti in direzione; in virtú della legge di conservazione dell'energia, restano immutati anche i loro valori assoluti. In questo modo, nel sistema c, il risultato dell'urto si riduce solo all'inversione di direzione delle velocità delle due particelle. Se indichiamo con $\mathbf{n}_0$ il versore nella direzione della velocità della particella m_1 dopo l'urto, le velocità di ambedue le particelle dopo l'urto (che indichiamo con un apice) saranno:

$$\mathbf{v}'_{10} = \frac{m_2}{m_1+m_2}v\mathbf{n}_0, \quad \mathbf{v}'_{20} = -\frac{m_1}{m_1+m_2}v\mathbf{n}_0. \tag{17,1}$$

Per tornare al sistema di laboratorio, è necessario aggiungere a queste espressioni la velocità $\mathbf{V}$ del centro di massa. Otteniamo cosí per le velocità delle particelle dopo l'urto nel sistema l:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}'_1 &= \frac{m_2}{m_1+m_2}v\mathbf{n}_0 + \frac{m_1\mathbf{v}_1+m_2\mathbf{v}_2}{m_1+m_2}, \\ \mathbf{v}'_2 &= -\frac{m_1}{m_1+m_2}v\mathbf{n}_0 + \frac{m_1\mathbf{v}_1+m_2\mathbf{v}_2}{m_1+m_2}. \end{aligned} \tag{17,2}$$

Con queste espressioni si esauriscono le informazioni che si possono ottenere sugli urti utilizzando solo le leggi di conservazione dell'impulso e dell'energia. Riguardo alla direzione del versore $\mathbf{n}_0$, essa dipende dalla legge d'interazione fra le particelle e dalla loro reciproca posizione durante l'urto.

I risultati ottenuti si possono interpretare geometricamente. A questo scopo è piú comodo passare dalle velocità agli impulsi. Moltiplicando le uguaglianze (17,2) rispettivamente per m_1 ed m_2, otteniamo:

$$\mathbf{p}'_1 = mv\mathbf{n}_0 + \frac{m_1}{m_1+m_2}(\mathbf{p}_1+\mathbf{p}_2), \quad \mathbf{p}'_2 = -mv\mathbf{n}_0 + \frac{m_2}{m_1+m_2}(\mathbf{p}_1+\mathbf{p}_2) \tag{17,3}$$

($m = m_1m_2/(m_1+m_2)$ è la massa ridotta). Tracciamo una circonferenza di raggio mv e facciamo la costruzione indicata nella fig. 15. Se il versore $\mathbf{n}_0$ è diretto lungo $\overrightarrow{OC}$, i vettori $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{CB}$ danno rispettivamente gli impulsi $\mathbf{p}_1$ e $\mathbf{p}_2$. Se i $\mathbf{p}_1$ e $\mathbf{p}_2$ sono fissati il raggio del cerchio e la posizione dei punti A e B non variano, mentre il punto C può prendere una posizione qualsiasi sulla circonferenza.

Consideriamo piú dettagliatamente il caso in cui una delle particelle (per esempio, m_2) è in quiete prima dell'urto. In questo caso la lunghezza $OB = \frac{m_2}{m_1+m_2} = mv$ coincide con il raggio, cioè il punto B

$$\overrightarrow{OC} = mv$$

$$\overrightarrow{AO} = \frac{m_1}{m_1+m_2}(\mathbf{p}_1+\mathbf{p}_2)$$

$$\overrightarrow{OB} = \frac{m_2}{m_1+m_2}(\mathbf{p}_1+\mathbf{p}_2)$$

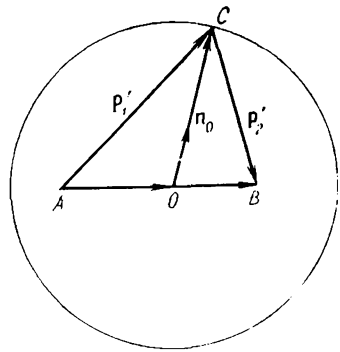


Fig. 15

giace sulla circonferenza. Il vettore AB coincide con l'impulso $\mathbf{p}_1$ della prima particella prima dell'urto; inoltre, il punto A si trova all'interno del cerchio (se $m_1 < m_2$) o all'esterno (se $m_1 > m_2$). I rispettivi

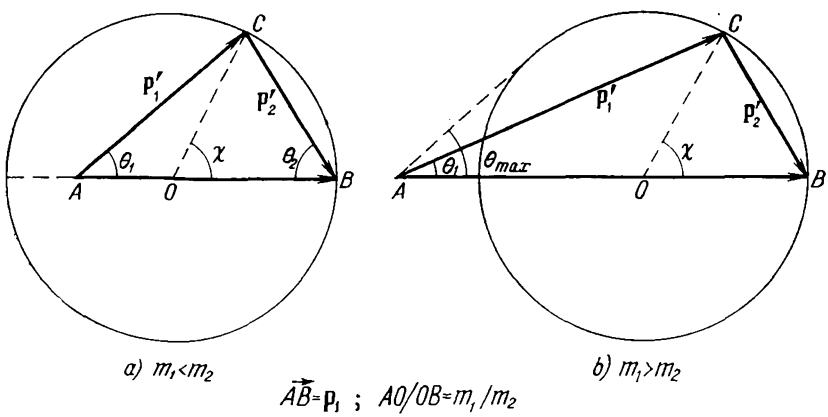


Fig. 16

diagrammi sono rappresentati nella fig. 16, *a* e *b*. Gli angoli θ_1 e θ_2 che vi sono indicati sono gli angoli di deflessione delle particelle dopo l'urto rispetto alla direzione di incidenza (direzione di $\mathbf{p}_1$). L'angolo al centro indicato nella figura con la lettera χ (che dà la direzione di $\mathbf{n}_0$) rappresenta l'angolo di deflessione della prima particella nel sistema del centro di massa. È evidente dalla figura che gli angoli θ_1 e θ_2

si possono esprimere in funzione dell'angolo χ con le formule

$$\operatorname{tg}\theta_1 = \frac{m_2 \operatorname{sen}\chi}{m_1 + m_2\cos\chi}, \quad \theta_2 = \frac{\pi - \chi}{2}. \tag{17,4}$$

Scriviamo anche le formule che danno i valori assoluti delle velocità di ambedue le particelle dopo l'urto in funzione dello stesso angolo χ:

$$v_2' = \frac{\sqrt{m_1^2 + m_2^2 + 2m_1m_2\cos\chi}}{m_1 + m_2}\, v, \quad v_2' = \frac{2m_1 v}{m_1 + m_2} \operatorname{sen}\frac{\chi}{2}. \tag{17,5}$$

La somma $\theta_1 + \theta_2$ è l'angolo formato dalle due direzioni lungo le quali le particelle si allontanano dopo l'urto. È evidente che $\theta_1 + \theta_2 > \pi/2$ per $m_1 < m_2$, e $\theta_1 + \theta_2 < \pi/2$ per $m_1 > m_2$.

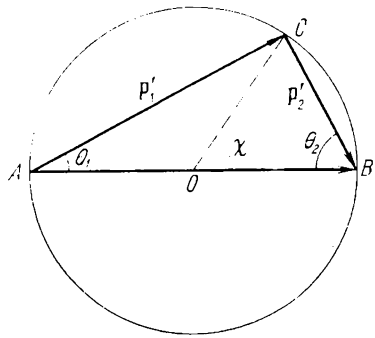


Fig. 17

Nel caso in cui le due particelle dopo l'urto si muovono sulla stessa retta (« urto frontale ») si ha $\chi = \pi$, cioè il punto C si trova o sul diametro a sinistra del punto A (fig. 16; a; $\mathbf{p}_1'$ e $\mathbf{p}_2'$ sono in questo caso reciprocamente opposti) oppure tra i punti A e O (fig. 16,b; $\mathbf{p}_1'$ e $\mathbf{p}_2'$ hanno allora lo stesso verso).

Le velocità delle particelle dopo l'urto sono date dalle formule:

$$\mathbf{v}_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\mathbf{v}, \quad \mathbf{v}_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}\mathbf{v}. \tag{17,6}$$

$\mathbf{v}_2'$ prende qui il valore massimo possibile; quindi l'energia massima che la particella perseverante inizialmente in quiete può acquistare in seguito all'urto è

$$E_{2\,\max}' = \frac{m_2 v_{2\,\max}'^2}{2} = \frac{4m_1m_2}{(m_1 + m_2)^2} E_1, \tag{17,7}$$

dove $E_1 = \frac{m_1 v_1^2}{2}$ è l'energia iniziale della particella incidente.

Se $m_1 < m_2$, la velocità della prima particella dopo l'urto può avere qualsiasi direzione. Se invece $m_1 > m_2$, l'angolo di deflessione della particella incidente non può superare un certo valore massimo

corrispondente alla posizione del punto C (fig. 16, b) per cui la retta AC è tangente alla circonferenza. È evidente che $\operatorname{sen}\theta_{1\max} = OC/OA$, ossia

$$\operatorname{sen}\theta_{1\,\max} = \frac{m_2}{m_1}. \tag{17,8}$$

L'urto di particelle di massa uguale (di cui una è inizialmente in quiete) si può descrivere in modo particolarmente semplice. In questo caso i punti B ed A stanno tutti e due sulla circonferenza (fig. 17). Si ha:

$$\theta_1 = \frac{\chi}{2}, \quad \theta_2 = \frac{\pi - \chi}{2}, \tag{17,9}$$

$$v_1' = v\cos\frac{\chi}{2}, \quad v_2' = v\operatorname{sen}\frac{\chi}{2}. \tag{17,10}$$

Notiamo che le particelle si allontanano l'una dall'altra dopo l'urto secondo direzioni mutuamente perpendicolari.

PROBLEMA

Esprimere, mediante gli angoli di deflessione nel sistema l, la velocità dopo l'urto di due particelle di cui, inizialmente, una (m_1) è in moto e un'altra (m_2) in quiete.

Soluzione. La fig. 16 ci dà $p_2' = 2\cdot OB\cdot\cos\theta_2$ oppure

$$v_2' = 2v\frac{m}{m_2}\cos\theta_2.$$

Per l'impulso $p_1' = AC$ abbiamo l'equazione

$$OC^2 = AO^2 + p_1'^2 - 2AO\cdot p_1'\cos\theta_1$$

ovvero

$$\left(\frac{v_1'}{v}\right)^2 - \frac{2m}{m_2}\frac{v_1'}{v}\cos\theta_1 + \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} = 0.$$

Di qui

$$\frac{v_1'}{v} = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\cos\theta_1 \pm \frac{1}{m_1 + m_2}\sqrt{m_2^2 - m_1^2\operatorname{sen}^2\theta_1}$$

(per $m_1 > m_2$ sono validi davanti alla radice ambedue i segni, e per $m_2 > m_1$, solo il segno $+$).

§ 18. *Diffusione di particelle*

Abbiamo già visto nel paragrafo precedente che per determinare completamente il risultato dell'urto di due particelle (determinazione dell'angolo χ) è necessario risolvere le equazioni del moto, tenendo conto di una ben determinata legge d'interazione fra le particelle.

In accordo con la regola generale, considereremo dapprima il problema equivalente della deflessione di una particella di massa m nel campo $U(r)$ di un centro di forze immobile (posto nel centro di massa delle due particelle).

Come è stato detto nel § 14, la traiettoria di una particella in un campo centrale è simmetrica rispetto alla retta passante per il punto

dell'orbita piú vicino al centro (OA nella fig. 18). Per questo i due asintoti dell'orbita intersecano questa retta formando con essa angoli uguali. Se indichiamo con φ_0 questi angoli, l'angolo di deflessione χ della particella nel punto piú vicino al centro è, come si vede dalla figura,

$$\chi = |\pi - 2\varphi_0|. \tag{18,1}$$

L'angolo φ_0 è dato, secondo la formula (14,7), dall'integrale

$$\varphi_0 = \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{\frac{M}{r^2}\,dr}{\sqrt{2m\,[E - U(r)] - \frac{M^2}{r^2}}}, \tag{18,2}$$

preso tra la distanza minima della particella dal centro e l'infinito. Ricordiamo che $r_{\min}$ è radice dell'espressione sotto il radicale.

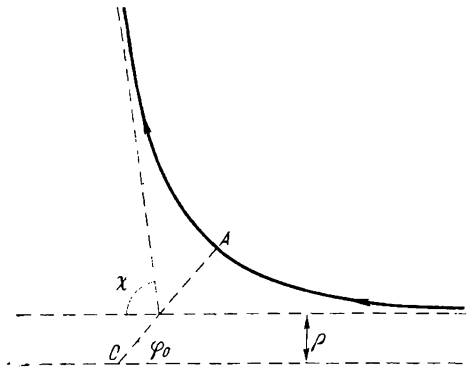


Fig. 18

Nel caso di un moto infinito, come è il nostro, è comodo utilizzare, in luogo delle costanti E ed M, la velocità v_∞ della particella all'infinito e il parametro ρ, chiamato *distanza d'urto*. Quest'ultima rappresenta il segmento di perpendicolare abbassata dal centro alla direzione di v_∞, cioè la distanza dal centro alla quale la particella passerebbe se non esistesse il campo di forze (fig. 18). L'energia e il momento angolare, espressi in funzione di queste grandezze, sono

$$E = \frac{mv_\infty^2}{2}, \qquad M = m\rho v_\infty, \tag{18,3}$$

e la formula (18,2) si scrive come segue:

$$\varphi_0 = \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{\rho\,\frac{dr}{r^2}}{\sqrt{1 - \frac{\rho^2}{r^2} - \frac{2U}{mv_\infty^2}}}. \tag{18,4}$$

Insieme con la (18,1) essa determina la dipendenza di χ da ρ.

Nelle applicazioni fisiche si ha spesso a che fare non con la deviazione di una particella singola, ma con la *diffusione* di un fascio di particelle uguali che incidono sul centro diffusore con la stessa velocità $\mathbf{v}_\infty$. Le diverse particelle del fascio hanno distanze d'urto diverse e, rispettivamente, vengono diffuse con angoli χ diversi. Sia dN il numero di particelle diffuse, nell'unità di tempo, nell'angolo compreso tra χ e $\chi + d\chi$. Per caratterizzare il processo di diffusione questo numero non è adatto di per sé, perché dipende dalla densità del fascio incidente (è ad essa proporzionale). Introduciamo perciò il rapporto

$$d\sigma = \frac{dN}{n}, \tag{18,5}$$

dove n è il numero di particelle passanti nell'unità di tempo per l'unità di superficie di una sezione trasversale del fascio (partiamo naturalmente dal pressupposto che il fascio sia omogeneo in ogni sua sezione). Questo rapporto ha la dimensione di una superficie e si dice *sezione efficace di diffusione*, o *sezione d'urto*. Esso è completamente determinato dalla forma del campo diffusore e costituisce la piú importante caratteristica della diffusione.

Considereremo la relazione tra χ e ρ biunivoca; questo si verifica quando l'angolo di diffusione è una funzione monotona decrescente della distanza d'urto. In questo caso in un dato intervallo $(\chi, \chi + d\chi)$ verranno diffuse soltanto quelle particelle la cui distanza d'urto è compresa tra $\rho(\chi)$ e $\rho(\chi) + d\rho(\chi)$. Il numero di queste particelle è uguale al prodotto di n per la superficie della corona circolare compresa tra le circonferenze di raggi ρ e $\rho + d\rho$, cioè $dN = 2\pi\rho\, d\rho \cdot n$. La sezione d'urto è quindi

$$d\sigma = 2\pi\rho\, d\rho. \tag{18,6}$$

Per trovare la dipendenza della sezione d'urto dall'angolo di diffusione, è sufficiente scrivere questa espressione nella forma

$$d\sigma = 2\pi\rho(\chi) \left| \frac{d\rho(\chi)}{d\chi} \right| d\chi. \tag{18,7}$$

Abbiamo scritto qui il valore assoluto della derivata $d\rho/d\chi$, in quanto essa può essere anche negativa (come è di solito) [1]. Spesso $d\sigma$ si riferisce non ad un elemento d'angolo piano $d\chi$, ma ad un elemento d'angolo solido do. L'angolo solido tra due coni di apertura χ e $\chi + d\chi$ è $do = 2\pi \operatorname{sen} \chi\, d\chi$. Dalla (18,7) troviamo quindi:

$$d\sigma = \frac{\rho(\chi)}{\operatorname{sen}\chi} \left| \frac{d\rho}{d\chi} \right| do. \tag{18,8}$$

Ritornando al problema della diffusione di un fascio di particelle non da parte di un centro di forza immobile, ma da parte di altre

[1]) Se la funzione $\rho(\chi)$ è polidroma, è necessario evidentemente prendere la somma di espressioni del tipo (18,7) per tutti i rami della funzione.

particelle inizialmente in quiete, possiamo affermare che la formula (18,7) definisce la sezione d'urto in funzione dell'angolo di diffusione nel sistema del centro di massa. Per trovare la sezione d'urto in funzione dell'angolo θ nel sistema di laboratorio, è necessario esprimere in questa formula χ con θ, secondo la (17,4). Si ottiene cosí l'espressione della sezione di diffusione sia per le particelle del fascio incidente (esprimendo χ in funzione di θ_1), sia per le particelle inizialmente in quiete (esprimendo χ in funzione di θ_2).

PROBLEMI

1. Determinare la sezione di diffusione delle particelle da parte di una sferetta perfettamente rigida di raggio a (cioè con una legge d'interazione tale che $U = \infty$ per $r < a$ ed $U = 0$ per $r > a$).

Soluzione. Poiché all'esterno della sferetta la particella si muove liberamente mentre dentro non può assolutamente penetrare, la traiettoria consta

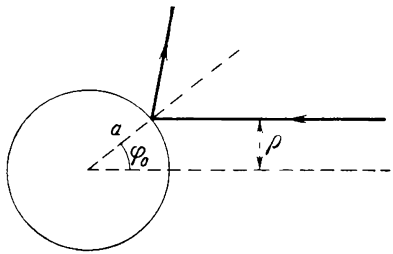


Fig. 19

di due rette simmetriche rispetto al raggio passante per il punto d'intersezione con la sferetta (fig. 19). Come si vede dalla figura

$$\rho = a \operatorname{sen} \varphi_0 = a \operatorname{sen} \frac{\pi - \chi}{2} = a \cos \frac{\chi}{2}.$$

Riportando queste espressioni nella (18,7) o nella (18,8), otteniamo:

$$d\sigma = \frac{\pi a^2}{2} \operatorname{sen} \chi \, d\chi = \frac{a^2}{4} \, do, \tag{1}$$

cioè la diffusione è isotropa nel sistema c. Integrando $d\sigma$ rispetto a tutti gli angoli, vedremo che la sezione totale $\sigma = \pi a^2$ è in accordo con il fatto che l'*area d'urto*, su cui deve incidere una particella per essere diffusa, è precisamente l'area della sezione della sferetta.

Per passare al sistema l, bisogna esprimere χ in funzione di θ_1, secondo la (17,4). I calcoli sono del tutto analoghi a quelli fatti nel problema 2 del § 16 [in virtú della somiglianza formale delle formule (17,4) e (16,5)]. Per $m_1 < m_2$ (m_1 massa della particella, m_2 massa della sferetta) si ha

$$d\sigma_1 = \frac{a^2}{4} \left[2 \frac{m_1}{m_2} \cos \theta_1 + \frac{1 + \frac{m_1^2}{m_2^2} \cos 2\theta_1}{\sqrt{1 - \frac{m_1^2}{m_2^2} \operatorname{sen}^2 \theta_1}} \right] do_1$$

($do_1 = 2\pi \operatorname{sen} \theta_1 d\theta_1$). Se invece $m_2 < m_1$, si ha:

$$d\sigma_1 = \frac{a^2}{2} \frac{1 + \frac{m_1^2}{m_2^2} \cos 2\theta_1}{\sqrt{1 - \frac{m_1^2}{m_2^2} \operatorname{sen}^2 \theta_1}} do_1.$$

Per $m_1 = m_2$ si ha:

$$d\sigma_1 = a^2 \mid \cos \theta_1 \mid do_1,$$

che si può ottenere anche con la sostituzione diretta $\chi = 2\theta_1$ (secondo la (17,9)) nella (1).

Per sferette inizialmente in quiete, si ha sempre $\chi = \pi - 2\theta_2$; sostituendo nella (1) χ con l'espressione ottenuta, abbiamo:

$$d\sigma_2 = a^2 \mid \cos \theta_2 \mid do_2.$$

2. Nello stesso caso del problema precedente esprimere la sezione d'urto come funzione dell'energia ε perduta dalle particelle diffuse.

Soluzione. L'energia perduta dalla particella m_1 è uguale all'energia acquistata dalla particella m_2. Utilizzando la (17,5) e la (17,7) otteniamo

$$\varepsilon = E_2' = \frac{2m_1^2 m_2}{(m_1 + m_2)^2} v_\infty^2 \operatorname{sen}^2 \frac{\chi}{2} = \varepsilon_{\max} \operatorname{sen}^2 \frac{\chi}{2},$$

da cui

$$d\varepsilon = \frac{1}{2} \varepsilon_{\max} \operatorname{sen} \chi \, d\chi.$$

Facendo un'appropriata sostituzione nella formula (1) del problema 1, otteniamo:

$$d\sigma = \pi a^2 \frac{d\varepsilon}{\varepsilon_{\max}}.$$

La distribuzione secondo i valori di ε delle particelle diffuse è uniforme in tutto l'intervallo di ε da zero a $\varepsilon_{\max}$.

3. Trovare la dipendenza della sezione d'urto dalla velocità v_∞ delle particelle nella diffusione in un campo $U \backsim r^{-n}$.

Soluzione. Conformemente alla (10,3), se l'energia potenziale è una funzione omogenea di grado $k = -n$, per le traiettorie simili si ha $\rho \backsim v^{-2/n}$ o in un'altra forma:

$$\rho = v_\infty^{-2/n} f(\chi)$$

(per le traiettorie simili gli angoli di deviazione χ sono uguali). Riportando la formula ottenuta nella (18,6), troviamo che

$$d\sigma \backsim v_\infty^{-4/n} do.$$

4. Determinare la sezione per una « caduta » delle particelle nel centro di un campo $U = -\alpha/r^2$.

Soluzione. Le particelle che « cadono » nel centro sono quelle per le quali è soddisfatta la condizione $2\alpha > m\rho^2 v_\infty^2$ [vedi la (14,11)], cioè la loro distanza d'urto non supera il valore $\rho_{\max} = \sqrt{2\alpha/mv_\infty^2}$. Donde la sezione cercata è

$$\sigma = \pi \rho_{\max}^2 = \frac{2\pi\alpha}{mv_\infty^2}.$$

5. Lo stesso problema 4 per un campo $U = -\alpha/r^n$ ($n > 2$, $\alpha > 0$).

Soluzione. L'energia potenziale efficace

$$U_{\text{eff}} = \frac{m\rho^2 v_\infty^2}{2r^2} - \frac{\alpha}{r^n},$$

data in funzione di r, ha la forma rappresentata nella fig. 20, con un valore massimo

$$(U_{\text{eff}})_{\max} \equiv U_0 = \frac{(n-2)\,\alpha}{2}\left(\frac{m\rho^2 v_\infty^2}{\alpha n}\right)^{\frac{n}{n-2}}.$$

Le particelle che « cadono » nel centro sono quelle per le quali $U_0 < E$. Determinando $\rho_{\max}$ dalla condizione $U_0 = E$, otteniamo:

$$\sigma = \pi n\,(n-2)^{\frac{2-n}{n}}\left(\frac{\alpha}{m v_\infty^2}\right)^{\frac{2}{n}}.$$

6. Determinare la sezione per la caduta di particelle (di massa m_1) sulla superficie di un corpo sferico (di massa m_2 e di raggio R), verso cui esse sono attratte secondo la legge di Newton.

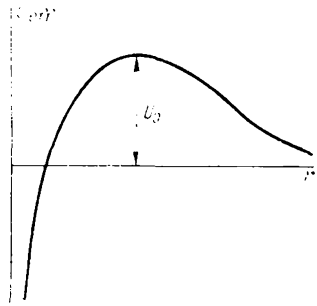


Fig. 20

Soluzione. La condizione di caduta è data dalla disuguaglianza $r_{\min} < R$, dove $r_{\min}$ è il punto della traiettoria della particella piú vicino al centro della sfera. Il valore massimo possibile di ρ è determinato dalla condizione $r_{\min} = R$ equivalente alla condizione espressa dall'equazione $U_{\text{eff}}(R) = E$, ovvero

$$\frac{m_1 v_\infty^2 \rho_{\max}^2}{2R^2} - \frac{\alpha}{R} = \frac{m_1 v_\infty^2}{2},$$

con $\alpha = \gamma m_1 m_2$ (γ è la costante gravitazionale), dove abbiamo posto $m \approx m_1$ considerando $m_2 \gg m_1$. Ricavando di qui $\rho^2_{\max}$, troviamo:

$$\sigma = \pi R^2\left(1 + \frac{2\gamma m_2}{R v_\infty^2}\right).$$

Quando $v_\infty \to \infty$, la sezione tende, evidentemente, all'area geometrica della sezione della sfera.

7. Stabilire la forma del campo diffusore $U(r)$ data la dipendenza della sezione efficace dall'angolo di diffusione e data un'energia E; si suppone che $U(r)$ sia una funzione monotona decrescente di r (campo repulsivo), con $U(0) > E$, $U(\infty) = 0$. (*O. B. Firsov*, 1953.)

Soluzione. L'integrazione di $d\sigma$ rispetto all'angolo di diffusione determina, secondo la formula

$$\int_{\chi}^{\pi} \frac{d\sigma}{d\chi}\, d\chi = \pi\rho^2, \tag{1}$$

il quadrato della distanza d'urto in modo tale da poter considerare come data la funzione $\rho(\chi)$ [e con essa anche la funzione $\chi(\rho)$].

Introduciamo le notazioni

$$s = \frac{1}{r}, \qquad x = \frac{1}{\rho^2}, \qquad w = \sqrt{1 - \frac{U}{E}}. \tag{2}$$

Le formule (18,1) e (18,2) si possono scrivere allora nel modo seguente:

$$\frac{\pi - \chi(x)}{2} = \int_0^{s_0} \frac{ds}{\sqrt{xw^2 - s^2}}, \tag{3}$$

dove $s_0(x)$ è la radice dell'equazione

$$xw^2(s_0) - s_0^2 = 0.$$

L'equazione (3) è un'equazione integrale della funzione $w(s)$; essa può essere risolta con un metodo analogo a quello utilizzato nel § 12. Dividendo i due membri della (3) per $\sqrt{\alpha - x}$ ed integrando rispetto a dx nell'intervallo da zero ad α, troviamo:

$$\int_0^{\alpha} \frac{\pi - \chi(x)}{2} \frac{dx}{\sqrt{\alpha - x}} = \int_0^{\alpha} \int_0^{s_0(x)} \frac{ds\, dx}{\sqrt{(xw^2 - s^2)(\alpha - x)}} =$$

$$= \int_0^{s_0(\alpha)} \int_{x(s_0)}^{\alpha} \frac{dx\, ds}{\sqrt{(xw^2 - s^2)(\alpha - x)}} = \pi \int_0^{s_0(\alpha)} \frac{ds}{w},$$

oppure, integrando per parti il primo membro dell'uguaglianza:

$$\pi\sqrt{\alpha} - \int_0^{\alpha} \sqrt{\alpha - x}\, \frac{d\chi}{dx}\, dx = \pi \int_0^{s_0(\alpha)} \frac{ds}{w}.$$

Deriviamo la relazione ottenuta rispetto ad α, dopo di che possiamo scrivere s in luogo di $s_0(\alpha)$ e sostituire α con s^2/w^2. Scrivendo l'ultima uguaglianza in forma differenziale, otteniamo:

$$\pi d\left(\frac{s}{w}\right) - \frac{1}{2} d\left(\frac{s^2}{w^2}\right) \int_0^{s^2/w^2} \frac{\chi'(x)\, dx}{\sqrt{\frac{s^2}{w^2} - x}} = \frac{\pi}{w}\, ds$$

ovvero

$$-\pi d \ln w = d\left(\frac{s}{w}\right) \int_0^{s^2/w^2} \frac{\chi'(x)\, dx}{\sqrt{\frac{s^2}{w^2} - x}}.$$

Questa equazione può essere integrata direttamente, ma nel secondo membro è necessario cambiare l'ordine d'integrazione in dx e $d(s/w)$. Tenendo conto che per $s = 0$ (cioè $r \to \infty$) si deve avere $w = 1$ (cioè $U = 0$), e tornando alle variabili r e ρ, si ottiene in definitiva il seguente risultato (in due forme equivalenti):

$$w = \exp\left\{\frac{1}{\pi}\int_{rw}^{\infty} \operatorname{Arch}\frac{\rho}{rw}\cdot\frac{d\chi}{d\rho}\,d\rho\right\} = \exp\left\{-\frac{1}{\pi}\int_{rw}^{\infty}\frac{\chi(\rho)\,d\rho}{\sqrt{\rho^2 - r^2w^2}}\right\}. \tag{4}$$

Questa formula determina in modo implicito l'andamento di $w(r)$ [e quindi di $U(r)$] per tutti gli $r > r_{\min}$, cioè nel campo dei valori di r che rappresentano la traiettoria di una particella diffusa d'energia data E.

§ 19. *Formula di Rutherford*

Uno dei piú importanti casi di applicazione delle formule ottenute sopra è quello della diffusione di particelle cariche in un campo coulombiano.

Ponendo nella (18,3) $U = \alpha/r$ e facendo un'integrazione elementare, si ottiene:

$$\varphi_0 = \arccos\frac{\dfrac{\alpha}{mv_\infty^2\rho}}{\sqrt{1+\left(\dfrac{\alpha}{mv_\infty^2\rho}\right)^2}},$$

da cui

$$\rho^2 = \frac{\alpha^2}{m^2v_\infty^4}\operatorname{tg}^2\varphi_0,$$

ossia, ponendo secondo la (18,1) $\varphi_0 = (\pi - \chi)/2$:

$$\rho^2 = \frac{\alpha^2}{m^2v_\infty^4}\operatorname{ctg}^2\frac{\chi}{2}. \tag{19,1}$$

Derivando questa espressione rispetto a χ e riportando il risultato nella (18,7) o nella (18,8), si ottiene:

$$d\sigma = \pi\left(\frac{\alpha}{mv_\infty^2}\right)^2\frac{\cos\dfrac{\chi}{2}}{\operatorname{sen}^3\dfrac{\chi}{2}}\,d\chi \tag{19,2}$$

ovvero

$$d\sigma = \left(\frac{\alpha}{2mv_\infty^2}\right)^2\frac{do}{\operatorname{sen}^4\dfrac{\chi}{2}}. \tag{19,3}$$

Questa è la *formula di Rutherford*. Notiamo che la sezione efficace non dipende dal segno di α, e il risultato ottenuto è valido in misura uguale per un campo coulombiano sia attrativo sia repulsivo.

La formula (19,3) dà la sezione efficace in un sistema di riferimento in cui il centro di massa delle particelle in collisione è a riposo. Il passaggio al sistema di laboratorio viene effettuato con l'aiuto della formula (17,4). Per le particelle che sono inizialmente in quiete si ottiene, sostituendo $\chi = \pi - 2\theta_2$ nella (19,2):

$$d\sigma_2 = 2\pi\left(\frac{\alpha}{mv_\infty^2}\right)^2 \frac{\operatorname{sen}\theta_2}{\cos^3\theta_2}\, d\theta_2 = \left(\frac{\alpha}{mv_\infty^2}\right)^2 \frac{do_2}{\cos^3\theta_2}. \qquad (19,4)$$

Per le particelle incidenti, invece, la trasformazione dà in generale una formula molto complicata. Notiamo soltanto due casi particolari.

Se la massa m_2 della particella bersaglio è grande in confronto alla massa m_1 della particella proiettile, allora si può porre $\chi \approx \theta_1$ ed $m \approx m_1$, ottenendo:

$$d\sigma_1 = \left(\frac{\alpha}{4E_1}\right)^2 \frac{do_1}{\operatorname{sen}^4\frac{\theta_1}{2}}, \qquad (19,5)$$

dove $E_1 = m_1 v_\infty^2/2$ è l'energia della particella incidente.

Se le masse di ambedue le particelle sono uguali ($m_1 = m_2$, $m = m_1/2$), allora, secondo la (17,9), $\chi = 2\theta_1$, e la sostituzione nella (19,2) dà:

$$d\sigma_1 = 2\pi\left(\frac{\alpha}{E_1}\right)^2 \frac{\cos\theta_1}{\operatorname{sen}^3\theta_1}\, d\theta_1 = \left(\frac{\alpha}{E_1}\right)^2 \frac{\cos\theta_1}{\operatorname{sen}^4\theta_1}\, do_1. \qquad (19,6)$$

Nel caso in cui le particelle non solo abbiano una massa uguale, ma siano identiche, la distinzione delle particelle dopo la diffusione in due gruppi: quelle inizialmente in moto e quelle inizialmente in quiete, non ha alcun senso. Sommando $d\sigma_1$ e $d\sigma_2$ e sostituendo θ_1 e θ_2 con un valore comune θ, otteniamo la sezione d'urto per tutte e due le particelle:

$$d\sigma = \left(\frac{\alpha}{E_1}\right)^2 \left(\frac{1}{\operatorname{sen}^4\theta} + \frac{1}{\cos^4\theta}\right)\cos\theta\, do. \qquad (19,7)$$

Mediante la formula generale (19,2) cerchiamo di determinare la distribuzione delle particelle diffuse rispetto all'energia da esse perduta in seguito all'urto. Per un rapporto arbitrario tra la massa (m_1) della particella proiettile e la massa (m_2) della particella bersaglio la velocità acquistata da quest'ultima viene espressa in funzione dell'angolo di diffusione nel sistema c dalla relazione

$$v_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_\infty \operatorname{sen}\frac{\chi}{2}$$

[vedi la (17,5)]. Di conseguenza, l'energia acquistata da questa particella, e quindi perduta dalla particella m_1, è uguale a

$$\varepsilon = \frac{m_2 v_2'^2}{2} = \frac{2m_1^2}{m_2} v_\infty^2 \operatorname{sen}^2\frac{\chi}{2}.$$

Di qui esprimendo sen $(\chi/2)$ in funzione di ε e riportando nella (19,2) otteniamo:

$$d\sigma = 2\pi \frac{\alpha^2}{m_2 v_\infty^2} \frac{d\varepsilon}{\varepsilon^2}. \tag{19,8}$$

Questa formula dà la risposta al problema posto in quanto essa determina la sezione d'urto in funzione della perdita d'energia ε; questa può assumere tutti i valori da zero a $\varepsilon_{max} = 2m^2v^2_\infty/m_2$.

PROBLEMI

1. Trovare la sezione di diffusione in un campo $U = \alpha/r^2$ $(\alpha > 0)$.
Soluzione. L'angolo di deflessione è

$$\chi = \pi\left[1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2\alpha}{m\rho^2 v_\infty^2}}}\right].$$

La sezione è

$$d\sigma = \frac{2\pi^2\alpha}{mv_\infty^2} \frac{\pi - \chi}{\chi^2(2\pi - \chi)^2} \frac{do}{\operatorname{sen}\chi}.$$

2. Trovare la sezione efficace nel caso di diffusione prodotta da una «buca di potenziale» sferica di raggio a e di «profondità» U_0 (cioè $U = 0$ per $r > a$, $U = -U_0$ per $r < a$).

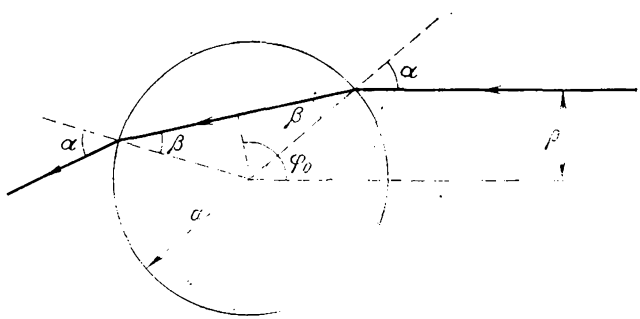


Fig. 21

Soluzione. La traiettoria rettilinea della particella, entrando ed uscendo dalla buca, si «rifrange». Secondo il problema del § 7, gli angoli d'incidenza α e di rifrazione β (fig. 21) sono legati dalla relazione

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\beta} = n, \qquad n = \sqrt{1 + \frac{2U_0}{mv_\infty^2}}.$$

L'angolo di deflessione è $\chi = 2(\alpha - \beta)$. Si ha dunque:

$$\frac{\operatorname{sen}(\alpha - \chi/2)}{\operatorname{sen}\alpha} = \cos\frac{\chi}{2} - \operatorname{ctg}\alpha \operatorname{sen}\frac{\chi}{2} = \frac{1}{n}.$$

Eliminando α da questa uguaglianza e dalla relazione

$$a \operatorname{sen} \alpha = \rho$$

(evidente dalla figura), si ottiene la relazione tra ρ e χ nella forma

$$\rho^2 = a^2 \frac{n^2 \operatorname{sen}^2 \frac{\chi}{2}}{n^2 + 1 - 2n \cos \frac{\chi}{2}}.$$

Infine, differenziando questa uguaglianza, si ottiene la sezione

$$d\sigma = \frac{a^2 n^2}{4 \cos \frac{\chi}{2}} \frac{\left(n \cos \frac{\chi}{2} - 1\right)\left(n - \cos \frac{\chi}{2}\right)}{\left(1 + n^2 - 2n \cos \frac{\chi}{2}\right)^2} do.$$

L'angolo χ varia nei limiti da zero (per $\rho = 0$) sino al valore χ_{max} (per $\rho = a$) determinato dall'uguaglianza:

$$\cos \frac{\chi_{max}}{2} = \frac{1}{n}.$$

La sezione totale che si ottiene integrando $d\sigma$ rispetto a tutti gli angoli interni del cono $\chi < \chi_{max}$ è evidentemente uguale all'area della sezione geometrica πa^2.

§ 20. *Diffusione a piccoli angoli*

Il calcolo della sezione d'urto si semplifica notevolmente se si prendono in considerazione soltanto le collisioni che avvengono a grandi distanze d'urto, dove il campo U è cosí debole che gli angoli di deflessione sono, corrispondentemente, piccoli. Il calcolo si può eseguire subito nel sistema del laboratorio, senza introdurre il sistema del baricentro.

Facciamo coincidere l'asse delle x con la direzione dell'impulso iniziale della particella proiettile (m_1) e il piano xy con il piano di diffusione. Indicando con $\mathbf{p}'_1$ l'impulso della particella dopo la diffusione, abbiamo l'uguaglianza:

$$\operatorname{sen} \theta_1 = \frac{p'_{1y}}{p'_1}.$$

Nel caso di piccole deflessioni si può sostituire approssimativamente sen θ_1 con θ_1 e, nel denominatore, p'_1 con l'impulso iniziale $p_1 = m_1 v_\infty$:

$$\theta_1 \approx \frac{p'_{1y}}{m_1 v_\infty}. \tag{20,1}$$

In seguito, poiché $\dot{p}_y = F_y$, l'incremento totale dell'impulso lungo l'asse y è:

$$p'_{1y} = \int_{-\infty}^{\infty} F_y \, dt. \tag{20,2}$$

Per la forza, poi, si ha

$$F_y = -\frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{dU}{dr}\frac{\partial r}{\partial y} = -\frac{dU}{dr}\frac{y}{r}.$$

Poiché l'integrale (20,2) contiene già la grandezza piccola U, si può, calcolandolo, considerare con la stessa approssimazione che la particella non devii affatto dalla traiettoria iniziale, cioè che si muova di moto rettilineo (lungo la retta $y = \rho$) e uniforme (con velocità v_∞). Poniamo quindi nella (20,2)

$$F_y = -\frac{dU}{dr}\frac{\rho}{r}, \qquad dt = \frac{dx}{v_\infty}$$

ed otteniamo:

$$p'_{1y} = -\frac{\rho}{v_\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dU}{dr}\frac{dx}{r}.$$

Infine, passiamo dall'integrazione rispetto a dx all'integrazione rispetto a dr. Poiché per una traiettoria rettilinea abbiamo $r^2 = x^2 + \rho^2$, quando x varia da $-\infty$ a $+\infty$, r varierà da ∞ a ρ e poi di nuovo a ∞. Perciò l'integrale rispetto a dx si trasforma nel doppio dell'integrale rispetto a dr nei limiti da ρ a ∞ con dx sostituito da

$$dx = \frac{r\,dr}{\sqrt{r^2-\rho^2}}.$$

Si ottiene infine per l'angolo di diffusione (20,1) la seguente espressione[1]):

$$\theta_1 = -\frac{2\rho}{m_1 v_\infty^2}\int_{\rho}^{\infty} \frac{dU}{dr}\frac{dr}{\sqrt{r^2-\rho^2}}, \tag{20,3}$$

che determina la relazione cercata tra θ_1 e ρ per una piccola deflessione. La sezione d'urto (nel sistema l) si ottiene da una formula identica alla (18,8) (con θ_1 in luogo di χ); è anche qui possibile sostituire sen θ_1 con θ_1:

$$d\sigma = \left|\frac{d\rho}{d\theta_1}\right| \frac{\rho(\theta_1)}{\theta_1}\, do_1. \tag{20,4}$$

[1]) Se tutto il nostro ragionamento si fa nel sistema c, si ottiene per χ la stessa espressione con m in luogo di m_1, in relazione al fatto che i piccoli angoli θ_1 e χ sono legati, in accordo con la (17,4), dalla relazione

$$\theta_1 = \frac{m_2}{m_1+m_2}\chi.$$

PROBLEMI

1. Dedurre la formula (20,3) dalla formula (18,4).

Soluzione. Per evitare divergenze fittizie degli integrali, scriviamo la (18,4) nella forma

$$\varphi_0 = -\frac{\partial}{\partial\rho}\int\limits_{r_{\min}}^{R}\sqrt{1-\frac{\rho^2}{r^2}-\frac{2U}{mv_\infty^2}}\,dr,$$

dove come limite superiore abbiamo preso una grande quantità R, avendo l'intenzione di passare poi al limite $R \to \infty$. Dato che U è piccolo, sviluppiamo il radicale secondo le potenze di U e sostituiamo approssimativamente $r_{\min}$ con ρ:

$$\varphi_0 = \int\limits_{\rho}^{R}\frac{\rho\,dr}{r^2\sqrt{1-\frac{\rho^2}{r^2}}} + \frac{\partial}{\partial\rho}\int\limits_{\rho}^{\infty}\frac{U(r)\,dr}{mv_\infty^2\sqrt{1-\frac{\rho^2}{r^2}}}.$$

Il primo integrale, dopo il passaggio al limite $R \to \infty$, dà $\pi/2$. Il secondo, dopo un'integrazione per parti, ci dà l'espressione

$$\chi = \pi - 2\varphi_0 = 2\frac{\partial}{\partial\rho}\int\limits_{\rho}^{\infty}\frac{\sqrt{r^2-\rho^2}}{mv_\infty^2}\frac{dU}{dr}\,dr = -\frac{2\rho}{mv_\infty^2}\int\limits_{\rho}^{\infty}\frac{dU}{dr}\frac{dr}{\sqrt{r^2-\rho^2}},$$

equivalente alla formula (20,3).

2. Determinare la sezione per diffusione a piccoli angoli in un campo $U = \alpha/r^n$ $(n > 0)$.

Soluzione. Abbiamo, secondo la (20,3),

$$\theta_1 = \frac{2\rho\alpha n}{m_1 v_\infty^2}\int\limits_{\rho}^{\infty}\frac{dr}{r^{n+1}\sqrt{r^2-\rho^2}}.$$

Ponendo $\rho^2/r^2 = u$, l'integrale si riduce ad un integrale B d'Eulero che si esprime mediante funzioni Γ:

$$\theta_1 = \frac{2\alpha\sqrt{\pi}}{m_1 v_\infty^2 \rho^n}\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}.$$

Esprimendo ρ in funzione di θ_1 e sostituendo nella (20,4), si ottiene:

$$d\sigma = \frac{1}{n}\left[\frac{2\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\frac{\alpha}{m_1 v_\infty^2}\right]^{\frac{2}{n}}\theta_1^{-2\left(1+\frac{1}{n}\right)}\,do_1.$$

Capitolo V

PICCOLE OSCILLAZIONI

§ 21. *Oscillazioni libere unidimensionali*

Un tipo molto diffuso di movimento nei sistemi meccanici è rappresentato dalle cosiddette *piccole oscillazioni* che un sistema compie in prossimità della sua posizione d'equilibrio stabile. Cominciamo a studiare questi movimenti dal caso piú semplice, quando il sistema ha un solo grado di libertà.

All'equilibrio stabile corrisponde una posizione del sistema in cui la sua energia potenziale $U(q)$ è minima; uno spostamento da questa posizione genera una forza $-dU/dq$ che tende a riportare il sistema nella sua posizione originaria. Indichiamo con q_0 il valore della coordinata generalizzata corrispondente. Per piccole deviazioni dalla posizione d'equilibrio, nello sviluppo della differenza $U(q) - U(q_0)$ in potenze di $q - q_0$ è sufficiente conservare il primo termine non nullo. Nel caso generale tale è il termine del secondo ordine

$$U(q) - U(q_0) \cong \frac{k}{2}(q - q_0)^2,$$

dove k è un coefficiente positivo (il valore della derivata seconda è $U''(q)$ per $q = q_0$). Nel seguito misureremo l'energia potenziale a partire dal suo valore minimo [cioè, porremo $U(q_0) = 0$] e indicheremo con

$$x = q - q_0 \tag{21,1}$$

lo spostamento della coordinata dal suo valore nella posizione d'equilibrio. Cosí,

$$U(x) = \frac{kx^2}{2}. \tag{21,2}$$

Nel caso generale l'energia cinetica di un sistema con un solo grado di libertà si può esprimere nella forma:

$$\frac{1}{2}a(q)\dot{q}^2 = \frac{1}{2}a(q)\dot{x}^2.$$

Nella stessa approssimazione è sufficiente sostituire la funzione $a(q)$ con il suo valore per $q = q_0$. Introducendo per brevità la notazione[1])

$$a(q_0) = m,$$

[1]) Sottolineiamo, però, che la grandezza m coincide con la massa soltanto se x è la coordinata cartesiana della particella.

otterremo la seguente espressione per la funzione lagrangiana di un sistema che compie piccole oscillazioni unidimensionali[1]):

$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{kx^2}{2}. \tag{21,3}$$

L'equazione del moto corrispondente a questa funzione si scrive:

$$m\ddot{x} + kx = 0, \tag{21,4}$$

ovvero

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0, \tag{21,5}$$

dove

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}. \tag{21,6}$$

L'equazione differenziale lineare (21,5) ha due soluzioni indipendenti: $\cos \omega t$ e $\operatorname{sen} \omega t$, cosicché la sua soluzione generale è

$$x = c_1 \cos \omega t + c_2 \operatorname{sen} \omega t. \tag{21,7}$$

Questa espressione si può scrivere anche nel modo seguente:

$$x = a \cos (\omega t + \alpha). \tag{21,8}$$

Poiché $\cos (\omega t + \alpha) = \cos \omega t \cos\alpha - \operatorname{sen} \omega t \operatorname{sen} \alpha$, un confronto con la (21,7) mostra che le costanti arbitrarie a ed α sono legate alle costanti c_1 e c_2 dalle relazioni

$$a = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}, \qquad \operatorname{tg} \alpha = -\frac{c_2}{c_1}. \tag{21,9}$$

Cosí, intorno alla sua posizione d'equilibrio stabile il sistema compie un moto oscillatorio armonico. Il coefficiente a davanti al fattore periodico nella (21,8) si chiama *ampiezza* delle oscillazioni, e l'argomento del coseno, la loro *fase*; α è il valore iniziale della fase che dipende, evidentemente, dalla scelta dell'origine dei tempi. La grandezza ω è la *frequenza ciclica* delle oscillazioni; nella fisica teorica questa grandezza si chiama brevemente *frequenza*, termine che anche noi useremo.

La frequenza è la caratteristica fondamentale delle oscillazioni, indipendente dalle condizioni iniziali del moto; come segue dalla formula (21,6), essa è completamente definita dalle proprietà del sistema meccanico come tale. È da notare, però, che questa proprietà della frequenza è dovuta all'ipotesi di piccole oscillazioni e viene meno se si va ad approssimazioni di grado piú elevato. Dal punto di vista matematico ciò significa che questa proprietà è connessa alla dipendenza quadratica dell'energia potenziale dalla coordinata[2]).

---

[1]) Un tale sistema è detto spesso *oscillatore* lineare.

[2]) Essa viene meno se la funzione $U(x)$ ha, per $x = 0$, un minimo di ordine piú elevato, cioè $U \backsim x^n$, $n > 2$ (vedi problema 2 *a*, § 11).

L'energia di un sistema che compie piccole oscillazioni è

$$E = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{kx^2}{2} = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \omega^2 x^2)$$

oppure, sostituendovi la (21,8):

$$E = \frac{1}{2} m\omega^2 a^2. \tag{21,10}$$

L'energia è proporzionale al quadrato dell'ampiezza delle oscillazioni.

A volte risulta comodo rappresentare la dipendenza della coordinata dal tempo di un sistema oscillante sotto forma della parte reale di un'espressione complessa

$$x = \mathrm{Re}\{Ae^{i\omega t}\}, \tag{21,11}$$

dove A è una costante complessa; scrivendo la (21,4) nella forma

$$A = ae^{i\alpha}, \tag{21,12}$$

ritorniamo all'espressione (21,8). La costante A è chiamata *ampiezza complessa*; il suo modulo coincide con l'ampiezza ordinaria, e il suo argomento con la fase iniziale.

Dal punto di vista matematico è piú semplice operare con fattori esponenziali anziché trigonometrici, poiché la derivazione non cambia la loro forma. Nelle operazioni lineari (addizione, moltiplicazione per coefficienti costanti, integrazione, derivazione), si può generalmente trascurare il segno che mette in evidenza la parte reale, riservandosi di fare questo passaggio soltanto nel risultato finale del calcolo.

PROBLEMI

1. Esprimere l'ampiezza e la fase iniziale delle oscillazioni mediante i valori iniziali x_0 e v_0 della coordinata e della velocità.

Risposta:

$$a = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}}, \qquad \mathrm{tg}\,\alpha = -\frac{v_0}{\omega x_0}.$$

2. Trovare il rapporto delle frequenze ω e ω' delle oscillazioni di due molecole biatomiche composte di atomi di isotopi diversi; le masse degli atomi sono rispettivamente m_1, m_2 ed m_1', m_2'.

Soluzione. Poiché gli atomi degli isotopi interagiscono allo stesso modo, $k = k'$. Le masse ridotte delle molecole fungono allora da coefficienti m nelle energie cinetiche. Si ha perciò, secondo la (21,6),

$$\frac{\omega'}{\omega} = \sqrt{\frac{m_1 m_2 (m_1' + m_2')}{m_1' m_2' (m_1 + m_2)}}.$$

3. Trovare la frequenza delle oscillazioni di un punto con massa m, suscettibile di moto su una retta e attaccato a una molla avente l'altro estremo fissato in un punto A (fig. 22) ad una distanza l dalla retta. La molla, quando la sua lunghezza è l, è tesa da una forza F.

Soluzione. L'energia potenziale della molla è uguale (a meno di infinitesimi d'ordine superiore) al prodotto della forza F per l'allungamento δl della molla. Per $x \ll l$ si ha:

$$\delta l = \sqrt{l^2 + x^2} - l \approx \frac{x^2}{2l},$$

per cui $U = Fx^2/2l$. Poiché l'energia cinetica è $mx^2/2$, si ha allora

$$\omega = \sqrt{\frac{F}{ml}}.$$

4. Risolvere il problema precedente per il caso in cui il punto m si muove lungo una circonferenza di raggio r (fig. 23).

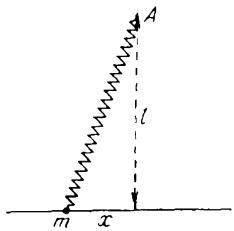


Fig. 22

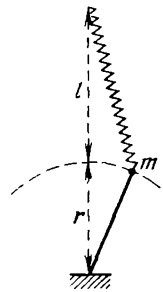


Fig. 23

Soluzione. In questo caso l'allungamento della molla (per $\varphi \ll 1$) è

$$\delta l = \sqrt{r^2 + (l+r)^2 - 2r(l+r)\cos\varphi} - l \approx \frac{r(l+r)}{2l}\varphi^2.$$

L'energia cinetica è $T = \frac{1}{2}mr^2\dot{\varphi}^2$. Quindi la frequenza è

$$\omega = \sqrt{\frac{F(r+l)}{rlm}}.$$

5. Trovare la frequenza delle oscillazioni del pendolo rappresentato nella fig 2, il cui punto di sospensione (di massa m_1) può muoversi lungo una retta orizzontale.

Soluzione. Per $\varphi \ll 1$ la formula ottenuta nel problema 3 del § 14 dà

$$T = \frac{m_1 m_2 l^2}{2(m_1 + m_2)}\dot{\varphi}^2, \qquad U = \frac{m_2 g l}{2}\varphi^2.$$

Quindi

$$\omega = \sqrt{\frac{g(m_1 + m_2)}{m_1 l}}.$$

6. Determinare la forma della curva lungo la quale (in un campo gravitazionale) un punto materiale è animato da un moto oscillatorio tale che la frequenza delle oscillazioni non dipende dall'ampiezza.

Soluzione. La condizione posta sarà soddisfatta da una curva lungo la quale la particella puntiforme animata da un moto avrà un'energia potenziale $U = ks^2/2$, dove s è la lunghezza dell'arco misurata a partire dalla posizione d'equi-

librio; l'energia cinetica sarà allora $T = ms^2/2$ (dove m è la massa della particella) e la frequenza delle oscillazioni $\omega = \sqrt{k/m}$ non dipenderà dal valore iniziale di s.

Ma nel campo di gravità $U = mgy$, dove y è la coordinata verticale. Quindi si ha $ks^2/2 = mgy$, ossia

$$y = \frac{\omega^2}{2g} s^2.$$

D'altra parte, $ds^2 = dx^2 + dy^2$, quindi

$$x = \int \sqrt{\left(\frac{ds}{dy}\right)^2 - 1}\, dy = \int \sqrt{\frac{g}{2\omega^2 y} - 1}\, dy.$$

Per facilitare l'integrazione facciamo la sostituzione

$$y = \frac{g}{4\omega^2}(1 - \cos \xi).$$

Si ha allora:

$$x = \frac{g}{4\omega^2}(\xi + \operatorname{sen} \xi).$$

Queste due uguaglianze determinano in forma parametrica l'equazione della curva cercata che è una cicloide.

§ 22. *Oscillazioni forzate*

Consideriamo ora le oscillazioni di un sistema soggetto all'azione di un campo esterno variabile; tali oscillazioni si chiamano *forzate* a differenza delle oscillazioni studiate nel paragrafo precedente, che sono dette *libere*. Poiché le oscillazioni si suppongono piccole, ne segue che il campo esterno deve essere sufficientemente debole; in caso contrario, esso potrebbe provocare uno spostamento x troppo grande.

Nel caso considerato in questo paragrafo, il sistema possiede oltre alla propria energia potenziale $\frac{1}{2} kx^2$ un'energia potenziale $U_e(x, t)$ dovuta all'azione del campo esterno. Sviluppando anche questo termine in serie di potenze della grandezza piccola x, si ottiene

$$U_e(x, t) \cong U_e(0, t) + x \left.\frac{\partial U_e}{\partial x}\right|_{x=0}.$$

Il primo termine è funzione solo del tempo e può quindi essere omesso nella funzione lagrangiana (come derivata totale rispetto a t di un'altra funzione del tempo). Nel secondo termine, la derivata $-\partial U_e/\partial x$ è la « forza » esterna che agisce sul sistema nella posizione d'equilibrio; essa è una funzione data del tempo e la indicheremo con $F(t)$. Nell'energia potenziale appare cosí il termine $-xF(t)$ per cui la funzione lagrangiana del sistema sarà

$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{kx^2}{2} + xF(t). \qquad (22,1)$$

L'equazione del moto corrispondente è

$$m\ddot{x} + kx = F(t),$$

oppure

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \frac{1}{m} F(t), \tag{22,2}$$

dove abbiamo nuovamente introdotto la frequenza ω delle oscillazioni libere.

Come è noto, la soluzione generale di un'equazione differenziale lineare non omogenea con coefficienti costanti si ottiene sotto forma di una somma di due espressioni: $x = x_0 + x_1$, dove x_0 è la soluzione generale dell'equazione omogenea ed x_1 un integrale particolare dell'equazione non omogenea. Nel caso considerato x_0 rappresenta le oscillazioni libere studiate nel paragrafo precedente.

Consideriamo ora un caso di particolare interesse in cui la forza esterna è anch'essa una funzione periodica semplice del tempo di frequenza γ:

$$F(t) = f \cos(\gamma t + \beta). \tag{22,3}$$

Cerchiamo un integrale particolare dell'equazione (22,2) sotto forma $x_1 = b \cos(\gamma t + \beta)$ con lo stesso fattore periodico. Sostituendo nell'equazione, si ha $b = f/m(\omega^2 - \gamma^2)$; aggiungendo la soluzione dell'equazione omogenea, si ottiene l'integrale generale della form

$$x = a \cos(\omega t + \alpha) + \frac{f}{m(\omega^2 - \gamma^2)} \cos(\gamma t + \beta). \tag{22,4}$$

Le costanti arbitrarie a ed α sono determinate dalle condizioni iniziali.

Dunque, sotto l'azione di una forza esterna periodica, il sistema compie un moto che si può rappresentare come una sovrapposizione di due oscillazioni, l'una con la frequenza propria del sistema ω e l'altra con la frequenza della forza esterna γ.

La soluzione (22,4) non è applicabile al caso della cosiddetta *risonanza* quando la frequenza della forza che provoca le oscillazioni del sistema coincide con la frequenza di quest'ultimo. Per trovare in questo caso la soluzione generale dell'equazione del moto, cambiando appropriatamente il valore delle costanti, scriviamo l'espressione (22,4) nella forma

$$x = a \cos(\omega t + \alpha) + \frac{f}{m(\omega^2 - \gamma^2)} [\cos(\gamma t + \beta) - \cos(\omega t + \beta)].$$

Quando $\gamma \to \omega$, il secondo termine genera una indeterminazione del tipo 0/0. Applicando la regola di L'Hôpital, si ottiene:

$$x = a \cos(\omega t + \alpha) + \frac{f}{2m\omega} t \operatorname{sen}(\omega t + \beta). \tag{22,5}$$

Cosí, nel caso di risonanza, l'ampiezza delle oscillazioni cresce linearmente con il tempo (finché le oscillazioni non cessano di essere piccole e tutta la teoria esposta diventa non applicabile).

Cerchiamo di chiarire ugualmente la forma che assumono le piccole oscillazioni vicino alla risonanza allorché $\gamma = \omega + \varepsilon$, dove ε è una grandezza piccola. Scriviamo la soluzione generale in forma complessa

$$x = Ae^{i\omega t} + Be^{i(\omega+\varepsilon)t} = (A + Be^{i\varepsilon t})\, e^{i\omega t}. \qquad (22,6)$$

Poiché la grandezza $A + Be^{i\varepsilon t}$ varia poco nel corso di un periodo $2\pi/\omega$ del fattore $e^{i\omega t}$, il moto vicino alla risonanza si può considerare come una piccola oscillazione di ampiezza, però, variabile[1]).

Indicando l'ampiezza con C, avremo:

$$C = |A + Be^{i\varepsilon t}|.$$

Esprimendo A e B rispettivamente nella forma $ae^{i\alpha}$ e $be^{i\beta}$, otterremo:

$$C^2 = a^2 + b^2 + 2ab \cos(\varepsilon t + \beta - \alpha). \qquad (22,7)$$

Cosí, l'ampiezza oscilla periodicamente con frequenza ε, variando fra i due limiti

$$|a - b| \leqslant C \leqslant a + b.$$

Questo fenomeno è chiamato *battimenti*.

L'equazione del moto (22,2) può essere integrata anche in forma generale, qualunque sia la forza esterna $F(t)$. Ciò è facile se scriviamo preliminarmente l'equazione nella forma

$$\frac{d}{dt}(\dot{x} + i\omega x) - i\omega(\dot{x} + i\omega x) = \frac{1}{m} F(t)$$

ossia

$$\frac{d\xi}{dt} - i\omega\xi = \frac{1}{m} F(t), \qquad (22,8)$$

dove è stata introdotta la grandezza complessa

$$\xi = \dot{x} + i\omega x. \qquad (22,9)$$

L'equazione (22,8) non è piú del secondo ordine, ma del primo. Senza il secondo membro la sua soluzione sarebbe $\xi = Ae^{i\omega t}$ con A costante. Seguendo la regola generale, cerchiamo per l'equazione non omogenea una soluzione del tipo $\xi = A(t)\, e^{i\omega t}$ ed otteniamo per la funzione $A(t)$ l'equazione

$$\dot{A}(t) = \frac{1}{m} F(t)\, e^{-i\omega t}.$$

---

[1]) Varia pure il termine « costante » nella fase delle oscillazioni.

Integrando, otteniamo la soluzione dell'equazione (22,9):

$$\xi = e^{i\omega t}\left\{\int_0^t \frac{1}{m} F(t)\, e^{-i\omega t}\, dt + \xi_0\right\}, \tag{22,10}$$

dove la costante d'integrazione ξ_0 è il valore di ξ nell'istante $t = 0$. Questa è la soluzione generale cercata; la funzione $x(t)$ è data dalla parte immaginaria dell'espressione (22,10) (divisa per $i\omega$)[1].

È ovvio che l'energia di un sistema che compie oscillazioni forzate non si conserva; il sistema attinge energia dalla sorgente della forza esterna. Determiniamo l'energia totale ceduta al sistema durante tutto il tempo in cui la forza agisce (da $-\infty$ a $+\infty$), supponendo nulla l'energia iniziale. Secondo la formula (22,10) (con $-\infty$ in luogo di zero come limite inferiore dell'integrazione e con $\xi(-\infty) = 0$) si ha per $t \to \infty$:

$$|\xi(\infty)|^2 = \frac{1}{m^2}\left|\int_{-\infty}^{\infty} F(t)\, e^{-i\omega t}\, dt\right|^2.$$

D'altra parte, l'energia del sistema come tale è data dall'espressione

$$E = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \omega^2 x^2) = \frac{m}{2}|\xi|^2. \tag{22,11}$$

Ponendo qui $|\xi(\infty)|^2$, otteniamo per l'energia ceduta il valore

$$E = \frac{1}{2m}\left|\int_{-\infty}^{\infty} F(t)\, e^{-i\omega t}\, dt\right|^2; \tag{22,12}$$

essa è dunque definita dal quadrato del modulo della componente di Fourier della forza $F(t)$ con frequenza uguale alla frequenza propria del sistema.

In particolare, se la forza esterna agisce soltanto per un breve intervallo di tempo $\left(\text{piccolo rispetto a } \frac{1}{\omega}\right)$, si può porre $e^{-i\omega t} \cong 1$. Allora abbiamo:

$$E = \frac{1}{2m}\left(\int_{-\infty}^{\infty} F(t)\, dt\right)^2.$$

Questo risultato è evidente a priori: esso significa che una forza di breve durata communica al sistema un impulso $\int F dt$, senza riuscire in un tempo cosí breve a provocare uno spostamento sensibile.

---

[1]) S'intende che la forza $F(t)$ deve essere qui scritta in forma reale.

PROBLEMI

1. Nell'istante iniziale $t = 0$ un sistema riposa nello stato d'equilibrio ($x = 0$, $\dot{x} = 0$). Determinare le oscillazioni forzate del sistema sotto l'azione di una forza $F(t)$ per i seguenti casi:

a) $F =$ costante $= F_0$.

Risposta: $x = \frac{F_0}{m\omega^2}(1 - \cos \omega t)$; l'azione di una forza costante provoca uno spostamento dalla posizione d'equilibrio attorno alla quale avvengono le oscillazioni.

b) $F = at$.

Risposta: $x = \frac{a}{m\omega^3}(\omega t - \operatorname{sen} \omega t)$.

c) $F = F_0 e^{-\alpha t}$.

Risposta: $x = \frac{F_0}{m(\omega^2 + \alpha^2)}\left(e^{-\alpha t} - \cos \omega t + \frac{\alpha}{\omega} \operatorname{sen} \omega t\right)$.

d) $F = F_0 e^{-\alpha t} \cos \beta t$.

Risposta:

$$x = \frac{F_0}{m[(\omega^2 + \alpha^2 - \beta^2)^2 + 4\alpha^2\beta^2]}\left\{-(\omega^2 + \alpha^2 - \beta^2)\cos \omega t + \right.$$
$$\left. + \frac{\alpha}{\omega}(\omega^2 + \alpha^2 + \beta^2) \operatorname{sen} \omega t + e^{-\alpha t}[(\omega^2 + \alpha^2 - \beta^2)\cos \beta t - 2\alpha\beta \operatorname{sen} \beta t]\right\}$$

[si troverà piú facilmente questa soluzione scrivendo la forza in forma complessa $F = F_0 e^{(-\alpha + i\beta)t}$].

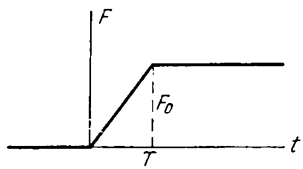


Fig. 24

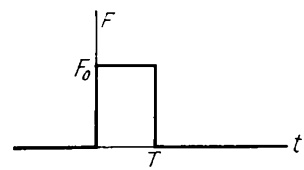


Fig. 25

2. Determinare l'ampiezza finale delle oscillazioni di un sistema dopo l'azione di una forza esterna che varia secondo la legge $F = 0$ per $t < 0$, $F = F_0 t/T$ per $0 < t < T$, $F = F_0$ per $t > T$ (fig. 24); fino all'istante $t = 0$ il sistema è in quiete nella posizione d'equilibrio.

Soluzione. Nell'intervallo di tempo $0 < t < T$, le oscillazioni che soddisfano la condizione iniziale hanno la forma

$$x = \frac{F_0}{mT\omega^3}(\omega t - \operatorname{sen} \omega t).$$

Per $t > T$ cerchiamo una soluzione del tipo

$$x = c_1 \cos \omega (t - T) + c_2 \operatorname{sen} \omega (t - T) + \frac{F_0}{m\omega^2}.$$

Dalla condizione di continuità di x ed $\dot{x}$ per $t = T$ ricaviamo:

$$c_1 = -\frac{F_0}{mT\omega^3} \operatorname{sen} \omega T, \qquad c_2 = \frac{F_0}{mT\omega^3}(1 - \cos \omega T).$$

Quindi l'ampiezza delle oscillazioni è

$$a = \sqrt{c_1^2 + c_2^2} = \frac{2F_0}{mT\omega^3} \operatorname{sen} \frac{\omega T}{2}.$$

Notiamo che essa è tanto piú piccola, quanto piú lentamente si « inserisce » la forza F_0 (cioè quanto piú grande è T).

3. Risolvere il problema 2 nel caso di una forza costante F_0 che agisce per un tempo limitato T (fig. 25).

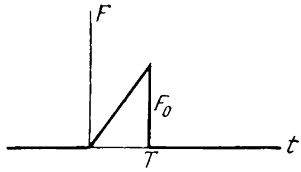


Fig. 26

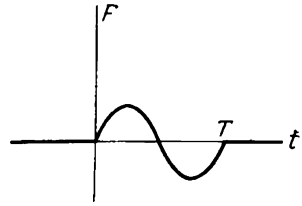


Fig. 27

Soluzione. Si può seguire lo stesso metodo che nel problema 2, ma è piú semplice servirsi della formula (22,10). Per $t > T$ abbiamo oscillazioni libere attorno alla posizione $x = 0$; allora

$$\xi = \frac{F_0}{m} e^{i\omega t} \int_0^T e^{-i\omega t} dt = \frac{F_0}{i\omega m} (1 - e^{-i\omega T}) e^{i\omega t};$$

il quadrato del modulo ξ dà l'ampiezza secondo la formula $|\xi|^2 = a^2\omega^2$. Si ottiene infine:

$$a = \frac{2F_0}{m\omega^2} \operatorname{sen} \frac{\omega T}{2}.$$

4. Risolvere il problema 2 nel caso di una forza agente in un intervallo da zero a T secondo la legge $F = F_0 t/T$ (fig. 26).

Soluzione. Usando lo stesso metodo si ottiene:

$$a = \frac{F_0}{Tm\omega^3} \sqrt{\omega^2 T^2 - 2\omega T \operatorname{sen} \omega T + 2(1 - \cos \omega T)}.$$

5. Risolvere il problema 2 nel caso di una forza che varia in un intervallo di tempo da zero a $T = 2\pi/\omega$ secondo la legge $F = F_0 \operatorname{sen} \omega t$ (fig. 27).

Soluzione. Sostituendo nella (22,10)

$$F(t) = F_0 \operatorname{sen} \omega t = \frac{F_0}{2i} (e^{i\omega t} - e^{-i\omega t})$$

ed integrando da zero a T, otteniamo:

$$a = \frac{F_0 \pi}{m\omega^2}.$$

§ 23. *Oscillazioni dei sistemi con piú gradi di libertà*

La teoria delle oscillazioni libere dei sistemi con piú (s) gradi di libertà può essere costruita analogamente alla teoria delle oscillazioni unidimensionali considerate nel § 21.

Supponiamo che l'energia potenziale U di un sistema, come funzione delle coordinate generalizzate q_i ($i = 1, 2, \ldots, s$), abbia un minimo per $q_i = q_{i0}$. Introducendo i piccoli spostamenti

$$x_i = q_i - q_{i0} \tag{23,1}$$

e sviluppando U rispetto ad essi sino ai termini del secondo ordine, otteniamo per l'energia potenziale la forma quadratica definita positivamente

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i,\,k} k_{ik} x_i x_k, \tag{23,2}$$

dove contiamo di nuovo l'energia potenziale a partire dal suo valore minimo. Poiché i coefficienti k_{ik} e k_{ki} entrano nella (23,2) moltiplicati per la stessa grandezza $x_i x_k$, è chiaro che si possono considerare sempre simmetrici rispetto ai loro indici

$$k_{ik} = k_{ki}.$$

Nell'espressione dell'energia cinetica, che generalmente può essere scritta nella forma

$$\frac{1}{2} \sum_{i,\,k} a_{ik}(q)\, \dot{q}_i \dot{q}_k$$

[vedi la (5,5)], sostituiamo i coefficienti $q_i = q_{i0}$; indicando le costanti $a_{ik}(q_0)$ con m_{ik}, otteniamo l'energia cinetica come forma quadratica positivamente definita

$$\frac{1}{2} \sum_{i,\,k} m_{ik} \dot{x}_i \dot{x}_k. \tag{23,3}$$

Anche i coefficienti m_{ik} possono essere considerati sempre simmetrici rispetto ai loro indici

$$m_{ik} = m_{ki}.$$

Dunque, un sistema che compie piccole oscillazioni libere ha per funzione di Lagrange

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i,\,k} (m_{ik} \dot{x}_i \dot{x}_k - k_{ik} x_i x_k). \tag{23,4}$$

Stabiliamo ora le equazioni del moto. Per determinare le derivate, scriviamo il differenziale totale della funzione di Lagrange:

$$dL = \frac{1}{2} \sum_{i,\,k} (m_{ik} \dot{x}_i\, d\dot{x}_k + m_{ik} \dot{x}_k\, d\dot{x}_i - k_{ik} x_i\, dx_k - k_{ik} x_k\, dx_i).$$

Poiché il valore della somma non dipende ovviamente da come si denotano gli indici della sommatoria, scambiamo nel primo e terzo termine tra parentesi i con k e k con i; tenendo conto della simmetria

dei coefficienti m_{ik} e k_{ik}, otteniamo

$$dL = \sum_{i,k} (m_{ik}\dot{x}_k\, d\dot{x}_i - k_{ik}x_k\, dx_i).$$

Da questa formula è chiaro che

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = \sum_k m_{ik}\dot{x}_k, \quad \frac{\partial L}{\partial x_i} = -\sum_k k_{ik}x_k.$$

Le equazioni di Lagrange sono quindi

$$\sum_k m_{ik}\ddot{x}_k + \sum_k k_{ik}x_k = 0. \tag{23,5}$$

Esse rappresentano un sistema di s ($i = 1, 2, \ldots, s$) equazioni differenziali lineari omogenee con coefficienti costanti.

Seguendo la regola generale di risoluzione di equazioni di questo tipo, cerchiamo le s funzioni incognite $x_k(t)$ nella forma

$$x_k = A_k e^{i\omega t}, \tag{23,6}$$

dove A_k sono costanti da determinare. Sostituendo la (23,6) nel sistema (23,5), otteniamo dopo la divisione per $e^{i\omega t}$ un sistema di equazioni algebriche lineari omogenee cui debbono soddisfare le costanti A_k:

$$\sum_k (-\omega^2 m_{ik} + k_{ik}) A_k = 0. \tag{23,7}$$

Affinché questo sistema abbia soluzioni differenti da zero, occorre che il determinante dei coefficienti si annulli

$$|k_{ik} - \omega^2 m_{ik}| = 0. \tag{23,8}$$

L'equazione (23,8), detta equazione *caratteristica*, è un'equazione di grado s in ω^2. Essa ha, in generale, s radici reali positive distinte ω_α^2, $\alpha = 1, 2, \ldots, s$ (in casi particolari alcune di queste radici possono coincidere). Le grandezze ω_α cosí definite sono dette *frequenze proprie* del sistema.

Il fatto che le radici dell'equazione (23, 8) sono reali e positive è evidente a priori da considerazioni fisiche. Infatti, se ω avesse una parte immaginaria, ciò significherebbe l'esistenza nelle relazioni (23,6), che definiscono le coordinate x_k in funzione del tempo (e anche delle velocità $\dot{x}_k$), di un fattore esponenziale crescente o decrescente. Ma l'esistenza di un tale fattore è inammissibile in questo caso, poiché porterebbe alla variazione con il tempo dell'energia totale del sistema $E = U + T$, cosa in contraddizione con la legge di conservazione.

Alla stessa conclusione si può giungere con un metodo puramente matematico. Moltiplicando l'equazione (23,7) per A_i^* e sommando

poi rispetto ad i, si ottiene

$$\sum_{i,k} (-\omega^2 m_{ik} + k_{ik}) A_i^* A_k = 0,$$

da cui

$$\omega^2 = \frac{\sum k_{ik} A_i^* A_k}{\sum m_{ik} A_i^* A_k}.$$

Essendo i coefficienti k_{ik} ed m_{ik} reali e simmetrici, le forme quadratiche al numeratore e al denominatore di questa espressione sono reali; infatti,

$$\left(\sum_{i,k} k_{ik} A_i^* A_k\right)^* = \sum_{i,k} k_{ik} A_i A_k^* = \sum_{i,k} k_{ki} A_i A_k^* = \sum_{i,k} k_{ik} A_k A_i^*.$$

Queste forme sono essenzialmente positive e, di conseguenza, è positiva la grandezza ω^2 [1]).

Sostituendo nelle equazioni (23,7) le frequenze ω_α con i valori trovati, otterremo i valori corrispondenti dei coefficienti A_k. Se tutte le radici ω_α dell'equazione caratteristica sono diverse, i coefficienti A_k sono proporzionali, come è noto, ai minori del determinante (23,8), nel quale ω è stata sostituita dal corrispondente valore ω_α. Indichiamo questi minori con $\Delta_{k\alpha}$. La soluzione particolare del sistema di equazioni differenziali (23,5) è quindi.

$$x_k = \Delta_{k\alpha} C_\alpha e^{i\omega_\alpha t},$$

dove C_α è una costante (complessa) arbitraria.

La soluzione generale è data dalla somma di tutte le s soluzioni particolari. Prendiamo di esse solo la parte reale e la scriviamo nella forma

$$x_k = \mathrm{Re}\left\{\sum_{\alpha=1}^{s} \Delta_{k\alpha} C_\alpha e^{i\omega_\alpha t}\right\} \equiv \sum_\alpha \Delta_{k\alpha} \Theta_\alpha, \tag{23,9}$$

dove abbiamo posto

$$\Theta_\alpha = \mathrm{Re}\,\{C_\alpha e^{i\omega_\alpha t}\}. \tag{23,10}$$

In tal modo, la variazione col tempo di ciascuna delle coordinate del sistema rappresenta la sovrapposizione di s oscillazioni periodiche semplici $\Theta_1, \Theta_2, \ldots, \Theta_s$ di ampiezze e di fasi arbitrarie ma di frequenze del tutto determinate.

---

[1]) Il fatto che la forma quadratica costruita con i coefficienti k_{ik} sia definita positiva, risulta evidente dalla definizione di quest'ultimi nella (23,2) per i valori reali delle variabili. Se scriviamo però le grandezze complesse A_k in forma esplicita $a_k + ib_k$, otterremo (sempre in virtù della simmetria di k_{ik}):

$$\sum_{i,k} k_{ik} A_i^* A_k = \sum_{i,k} k_{ik} (a_i - ib_i)(a_k + ib_k) = \sum_{i,k} k_{ik} a_i a_k + \sum_i k_{ik} b_i b_k,$$

cioè la somma di due forme definite positive.

Sorge qui una domanda spontanea: è possibile scegliere le coordinate generalizzate in modo tale che ciascuna di esse compia una sola oscillazione semplice? La forma stessa dell'integrale generale (23,9) indica la via per risolvere questo problema.

In effetti, considerando le s relazioni (23,9) come un sistema di equazioni con s incognite Θ_α, possiamo, risolvendo questo sistema, esprimere le grandezze $\Theta_1, \Theta_2, \ldots, \Theta_s$ mediante le coordinate $x_1, x_2, \ldots, x_s$. Le grandezze Θ_α si possono considerare quindi come nuove coordinate generalizzate. Queste coordinate sono dette *normali* (o principali) e le loro oscillazioni periodiche semplici, *oscillazioni normali del sistema.*

Le coordinate normali Θ_α soddisfano, come segue dalla loro definizione, le equazioni

$$\ddot{\Theta}_\alpha + \omega_\alpha^2 \Theta_\alpha = 0. \tag{23,11}$$

Ciò significa che le equazioni del moto in coordinate normali si separano in s equazioni indipendenti. L'accelerazione di ciascuna coordinata normale dipende soltanto dal valore di questa stessa coordinata e per determinarne completamente l'andamento nel tempo occorre conoscere il valore iniziale soltanto della coordinata stessa e della corrispondente velocità. In altri termini, le oscillazioni normali del sistema sono completamente indipendenti.

Da quanto detto risulta in modo evidente che la funzione di Lagrange, espressa in coordinate normali, si separa in una somma di espressioni ciascuna delle quali corrisponde ad una oscillazione lineare di frequenza ω_α, cioè assume la forma

$$L = \sum_\alpha \frac{m_\alpha}{2} (\dot{\Theta}_\alpha^2 - \omega_\alpha^2 \dot{\Theta}_\alpha^2), \tag{23,12}$$

dove m_α sono costanti positive. Dal punto di vista matematico ciò significa che le due forme quadratiche: energia cinetica (23,3) ed energia potenziale (23,2) vengono ridotte contemporaneamente dalla trasformazione (23,9) ad una forma diagonale.

Le coordinate normali vengono scelte solitamente in modo tale che i coefficienti dei quadrati delle velocità nella funzione lagrangiana siano uguali a 1/2. È sufficiente a questo scopo determinare le coordinate normali (indichiamole ora con Q_α) dalle uguaglianze

$$Q_\alpha = \sqrt{m_\alpha \Theta_\alpha}. \tag{23,13}$$

Allora

$$L = \frac{1}{2} \sum_\alpha (\dot{Q}_\alpha^2 - \omega_\alpha^2 Q_\alpha^2).$$

Quanto esposto sopra cambia poco nel caso in cui fra le radici dell'equazione caratteristica alcune sono multiple. La forma generale (23,9), (23,10) dell'integrale delle equazioni del moto resta inal-

terata (con lo stesso numero s di termini), con la sola differenza che i coefficienti $\Delta_{k\alpha}$ corrispondenti alle frequenze multiple non sono piú i minori del determinante i quali, come è noto, in questo caso si annullano [1]).

A ciascuna frequenza multipla (o, come si dice, *degenere*) corrispondono tante coordinate normali diverse quanto è il grado di molteplicità, ma la scelta di queste coordinate non è univoca. Dato che le coordinate normali (con la stessa ω_α) entrano nell'energia cinetica e nell'energia potenziale sotto forma di somme $\Sigma\dot{Q}_\alpha$ e ΣQ_α^2 con proprietà identiche di trasformazione, le si può sottoporre a qualsiasi trasformazione lineare che lasci invariante la somma dei quadrati.

La determinazione delle coordinate normali per oscillazioni tridimensionali di un punto materiale che si trova costantemente in un campo esterno è assai semplice. Ponendo l'origine di un sistema di coordinate cartesiane in un punto di minimo dell'energia potenziale $U(x, y, z)$, otteniamo quest'ultima in una forma quadratica delle variabili x, y, z, mentre l'energia cinetica

$$T = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$$

(m è la massa delle particelle) non dipende dalla scelta della direzione degli assi coordinati. È sufficiente quindi ridurre l'energia potenziale, con una rotazione appropriata degli assi, ad una forma diagonale. Abbiamo allora

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - \frac{1}{2}(k_1x^2 + k_2y^2 + k_3z^2), \qquad (23,14)$$

e lungo gli assi x, y, z si hanno oscillazioni principali di frequenze

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k_1}{m}}, \qquad \omega_2 = \sqrt{\frac{k_2}{m}}, \qquad \omega_3 = \sqrt{\frac{k_3}{m}}.$$

Nel caso particolare di un campo a simmetria centrale ($k_1 = k_2 = k_3 \equiv k$, $U = kr^2/2$), queste tre frequenze coincidono (vedi problema 3).

L'uso delle coordinate normali permette di ridurre il problema delle oscillazioni forzate di un sistema con piú gradi di libertà al problema delle oscillazioni forzate unidimensionali. Tenendo conto dell'azione di forze esterne variabili, la funzione di Lagrange del sistema assume la forma

$$L = L_0 + \sum_k F_k(t)\, x_k, \qquad (23,15)$$

---

[1]) Il fatto che nell'integrale generale non possono comparire accanto ai fattori esponenziali anche fattori algebrici dipendenti dal tempo è evidente dalle stesse considerazioni fisiche che escludono l'esistenza di « frequenze » complesse: la presenza di tali fattori contraddirebbe la legge di conservazione dell'energia.

dove L_0 è la lagrangiana delle oscillazioni libere. Sostituendo alle coordinate x_k le coordinate normali, si ottiene:

$$L = \frac{1}{2} \sum_\alpha (\dot{Q}_\alpha^2 - \omega_\alpha^2 Q_\alpha^2) + \sum_\alpha f_\alpha(t)\, Q_\alpha, \tag{23,16}$$

dove

$$f_\alpha(t) = \sum_k F_k(t) \frac{\Delta_{k\alpha}}{\sqrt{m_\alpha}}.$$

Le equazioni del moto sono allora

$$\ddot{Q}_\alpha + \omega_\alpha^2 Q_\alpha = f_\alpha(t) \tag{23,17}$$

e contengono ciascuna una sola funzione incognita $Q_\alpha(t)$.

PROBLEMI

1. Determinare le oscillazioni di un sistema con due gradi di libertà se la sua funzione di Lagrange è

$$L = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{\omega_0^2}{2}(x^2 + y^2) + \alpha xy$$

(due sistemi unidimensionali identici con frequenza propria ω_0, legati dall'interazione $-\alpha xy$).

Soluzione. Le equazioni del moto sono

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \alpha y, \qquad \ddot{y} + \omega_0^2 y = \alpha x.$$

La sostituzione (23,6) dà:

$$A_x(\omega_0^2 - \omega^2) = \alpha A_y, \qquad A_y(\omega_0^2 - \omega^2) = \alpha A_x. \tag{1}$$

L'equazione caratteristica è $(\omega_0^2 - \omega^2)^2 = \alpha^2$, da cui

$$\omega_1^2 = \omega_0^2 - \alpha, \qquad \omega_2^2 = \omega_0^2 + \alpha.$$

Per $\omega = \omega_1$ le equazioni (1) danno $A_x = A_y$, e per $\omega = \omega_2$ $A_x = -A_y$. Di conseguenza,

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}(Q_1 + Q_2), \qquad y = \frac{1}{\sqrt{2}}(Q_1 - Q_2)$$

(il coefficiente $1/\sqrt{2}$ corrisponde alla normalizzazione delle coordinate indicata nel testo).

Per $\alpha \ll \omega_0^2$ (legame debole), abbiamo:

$$\omega_1 \approx \omega_0 - \frac{\alpha}{2\omega_0}, \qquad \omega_2 \approx \omega_0 + \frac{\alpha}{2\omega_0}.$$

La variazione di x ed y rappresenta in questo caso la sovrapposizione di due oscillazioni di frequenze vicine, cioè ha un carattere di battimenti con frequenza $\omega_2 - \omega_1 = \alpha/\omega_0$ (vedi § 22). Notiamo che nell'istante in cui l'ampiezza della coordinata x raggiunge il suo massimo, l'ampiezza della coordinata y raggiunge il suo minimo, e viceversa.

2. Determinare le piccole oscillazioni di un pendolo piano doppio (fig. 1).

Soluzione. Per piccole oscillazioni ($\varphi_1 \ll 1$, $\varphi_2 \ll 1$) la funzione di Lagrange, trovata nel problema 1 del § 5, assume la forma

$$L = \frac{m_1+m_2}{2} l_1^2\dot{\varphi}_1^2 + \frac{m_2}{2} l_2^2\dot{\varphi}_2^2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2 -$$

$$- \frac{m_1+m_2}{2} g l_1 \varphi_1^2 - \frac{m_2}{2} g l_2 \varphi_2^2.$$

Le equazioni del moto sono:

$$(m_1+m_2) l_1 \ddot{\varphi}_1 + m_2 l_2 \ddot{\varphi} + (m_1+m_2) g\varphi_1 = 0,$$

$$l_1 \ddot{\varphi}_1 + l_2 \ddot{\varphi}_2 + g\varphi_2 = 0.$$

Dopo la sostituzione (23,6) abbiamo:

$$A_1 (m_1+m_2)(g - l_1\omega^2) - A_2\omega^2 m_2 l_2 = 0,$$

$$-A_1 l_1 \omega^2 + A_2 (g - l_2\omega^2) = 0.$$

Le radici dell'equazione caratteristica sono:

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{g}{2m_1 l_1 l_2} \{(m_1+m_2)(l_1+l_2) \pm$$

$$\pm \sqrt{(m_1+m_2)[(m_1+m_2)(l_1+l_2)^2 - 4m_1 l_1 l_2]}\}.$$

Quando $m_1 \to \infty$, le frequenze tendono ai limiti $\sqrt{g/l_1}$ e $\sqrt{g/l_2}$ che corrispondono alle oscillazioni indipendenti dei due pendoli.

3. Trovare la traiettoria di una particella in un campo centrale $U = kr^2/2$ (*oscillatore spaziale*).

Soluzione. Come in ogni campo centrale, il moto avviene in un piano. Sia questo il piano xy. La variazione di ciascuna coordinata x, y è un'oscillazione semplice di una stessa frequenza $\omega = \sqrt{k/m}$:

$$x = a\cos(\omega t + \alpha), \quad y = b\cos(\omega t + \beta)$$

ovvero

$$x = a\cos\varphi, \quad y = b\cos(\varphi + \delta) = b\cos\delta\cos\varphi - b\,\mathrm{sen}\,\delta\,\mathrm{sen}\,\varphi,$$

dove è stato posto $\varphi = \omega t + \alpha$, $\delta = \beta - \alpha$. Ricavando di qui $\cos\varphi$ e $\mathrm{sen}\,\varphi$ e formando la somma dei loro quadrati, si ottiene l'equazione della traiettoria:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{2xy}{ab}\cos\delta = \mathrm{sen}^2\delta$$

che rappresenta un'ellisse avente per centro l'origine delle coordinate[1]). Per $\delta = 0$ oppure π, la traiettoria degenera in segmenti di retta.

§ 24. *Oscillazioni delle molecole*

Se si ha un sistema di particelle interagenti, ma non poste in un campo esterno, non tutti i gradi di libertà del sistema hanno carattere oscillatorio. Le molecole sono un tipico esempio di sistemi di questo genere. Oltre ai movimenti che rappresentano oscillazioni degli

[1]) Il fatto che in un campo d'energia potenziale $U = kr^2/2$ il moto possa avvenire lungo una curva chiusa, è stato già notato nel § 14.

atomi intorno alla loro posizione d'equilibrio all'interno della molecola, la molecola in blocco può compiere moti traslazionale e rotazionale.

Al moto di traslazione corrispondono tre gradi di libertà, ed altrettanti ne possiede generalmente il moto di rotazione; dei $3n$ gradi di libertà di una molecola n - atomica, $3n - 6$ corrispondono quindi a un moto oscillatorio. Fanno eccezione molecole nelle quali tutti gli atomi sono distribuiti lungo una retta. Poiché parlare di rotazione intorno a questa retta non ha senso in questo caso, esistono solamente due gradi di libertà corrispondenti al moto di rotazione; quindi i moti oscillatori possiedono $3n - 5$ gradi di libertà.

Per risolvere il problema meccanico delle oscillazioni di una molecola, è opportuno escludere sin dall'inizio i gradi di libertà corrispondenti ai moti traslazionali e rotazionali.

Per eliminare il moto di traslazione, è necessario porre uguale a zero l'impulso totale della molecola. Questo significa immobilità del suo centro di massa, ciò che si può esprimere matematicamente ponendo uguali a costanti le tre coordinate di quest'ultimo. Posto $\mathbf{r}_a = \mathbf{r}_{a0} + \mathbf{u}_a$ (dove $\mathbf{r}_{a0}$ è il raggio vettore della posizione immobile d'equilibrio dell'a - esimo atomo ed $\mathbf{u}_a$ il suo spostamento da questa posizione), scriviamo la condizione

$$\sum m_a \mathbf{r}_a = \text{costante} \equiv \sum m_a \mathbf{r}_{a0}$$

nella forma

$$\Sigma m_a \mathbf{u}_a = 0. \tag{24,1}$$

Per eliminare la rotazione della molecola occorre porre uguale a zero il suo momento angolare totale. Dato che il momento angolare non è la derivata totale rispetto al tempo di una funzione delle coordinate, questa condizione non può essere espressa, in generale, ponendo uguale a zero una funzione di questo tipo. Il caso delle piccole oscillazioni rappresenta, però, un'eccezione. Infatti, ponendo ancora $\mathbf{r}_a = \mathbf{r}_{a0} + \mathbf{u}_a$ e trascurando gli infinitesimi del secondo ordine negli spostamenti $\mathbf{u}_a$, scriviamo il momento angolare della molecola nella forma

$$M = \sum m_a [\mathbf{r}_a \mathbf{v}_a] \cong \sum m_a [\mathbf{r}_{a0} \dot{\mathbf{u}}_a] = \frac{d}{dt} \sum m_a [\mathbf{r}_{a0} \mathbf{u}_a].$$

La condizione perché esso scompaia può essere espressa, in questa approssimazione, nel seguente modo:

$$\sum m_a [\mathbf{r}_{a0} \mathbf{u}_a] = 0 \tag{24,2}$$

(l'origine delle coordinate può essere scelta qui arbitrariamente).

Le oscillazioni normali di una molecola si possono classificare secondo il carattere del moto degli atomi, partendo da considerazioni legate alla simmetria della configurazione degli atomi nella molecola

(posizione d'equilibrio). Esiste a questo scopo un metodo generale basato sull'uso della teoria dei gruppi; questo metodo verrà esposto in un altro volume del presente corso [1]). Ci limiteremo per ora a qualche esempio elementare.

Se tutti gli n atomi della molecola si trovano in un medesimo piano, si possono distinguere le oscillazioni normali che lasciano gli atomi in questo piano da quelle che li fanno uscire da questo piano. È facile stabilire il numero delle oscillazioni dell'uno e dell'altro tipo poiché per un moto piano ci sono in tutto $2n$ gradi di libertà dei quali due di traslazione e uno di rotazione, il numero delle oscillazioni normali che lasciano gli atomi nel piano è uguale a $2n - 3$. Gli altri $(3n - 6) - (2n - 3) = n - 3$ gradi di libertà del moto oscillatorio corrispondono alle oscillazioni che fanno uscire gli atomi dal piano.

Nel caso di una molecola lineare, si possono distinguere le oscillazioni longitudinali che ne conservano la forma rettilinea dalle oscillazioni che fanno uscire gli atomi dalla retta. Poiché al moto di n particelle su una linea corrispondono n gradi di libertà, di cui uno traslazionale, il numero di oscillazioni che non fanno uscire gli atomi dalla retta è uguale ad $n - 1$. Essendo $3n - 5$ il numero totale di gradi di libertà del moto oscillatorio di una molecola lineare, le oscillazioni che portano gli atomi fuori dalla retta sono quindi $2n - 4$. A queste oscillazioni corrispondono, però, in tutto $n - 2$ frequenze distinte, poiché ognuna di queste oscillazioni può essere realizzata in due modi indipendenti, cioè in due piani reciprocamente perpendicolari (passanti per l'asse della molecola); dalle considerazioni di simmetria risulta chiaramente che ciascuna coppia di oscillazioni normali ha un'unica frequenza.

PROBLEMI [2])

1. Determinare le frequenze delle oscillazioni di una molecola lineare, simmetrica, triatomica ABA (fig. 28). Si suppone che l'energia potenziale della molecola dipenda solo dalle distanze $A - B$ e $B - A$ e dall'angolo ABA.

Soluzione. Gli spostamenti longitudinali degli atomi x_1, x_2, x_3 sono legati, in virtú della (24,1), dalla relazione

$$m_A (x_1 + x_3) + m_B x_2 = 0.$$

Con l'aiuto di questa formula eliminiamo x_2 dalla funzione di Lagrange del moto longitudinale della molecola

$$L = \frac{m_A}{2} (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_3^2) + \frac{m_B}{2} \dot{x}_2^2 - \frac{k_1}{2} [(x_1 - x_2)^2 + (x_3 - x_2)^2],$$

---

[1]) Vedi *Meccanica quantistica*, § 100.

[2]) Per le oscillazioni di molecole piú complesse si veda M. Volkenstein, M. Eljascevic, B. Stepanov, *Kolebania molekul* (Oscillazioni delle molecole), Gostechizdat, 1949, Mosca; G. Herzberg, *Molecular Spectra and Molecular Structure*, Van Nostrand, 1945, New York.

dopo di che, introducendo le nuove coordinate

$$Q_a = x_1 + x_3,\ Q_s = x_1 - x_3,$$

otteniamo

$$L = \frac{m_A\mu}{4m_B}\dot{Q}_a^2 + \frac{m_A}{4}\dot{Q}_s^2 - \frac{k_1\mu^2}{4m_B^2}Q_a^2 - \frac{k_1}{4}Q_s^2$$

($\mu = 2m_A + m_B$ è la massa della molecola). Da questa relazione si vede che Q_a e Q_s sono coordinate normali (a meno della normalizzazione). La coordinata

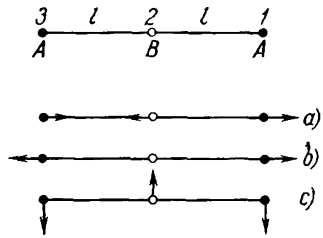


Fig. 28

Q_a corrisponde a una oscillazione antisimmetrica rispetto al centro della molecola ($x_1 = x_3$; fig. 28, *a*) con frequenza

$$\omega_a = \sqrt{\frac{k_1\mu}{m_A m_B}}.$$

La coordinata Q_s corrisponde a una oscillazione simmetrica ($x_1 = -x_3$; fig. 28,*b*) con frequenza

$$\omega_{s1} = \sqrt{\frac{k_1}{m_A}}.$$

Gli spostamenti trasversali degli atomi y_1, y_2, y_3 sono legati, in virtù delle (24,1) e (24,2), dalle relazioni

$$m_A(y_1 + y_3) + m_B y_2 = 0,\ y_1 = y_3$$

(oscillazione simmetrica della curvatura; fig. 28,*c*). Scriviamo l'energia potenziale di curvatura della molecola nella forma $k_2 l^2\delta^2/2$, dove δ è la deviazione dell'angolo ABA da π; questa deviazione si esprime mediante gli spostamenti nel seguente modo:

$$\delta = \frac{1}{l}[(y_1 - y_2) + (y_3 - y_2)].$$

Esprimendo tutti gli spostamenti y_1, y_2, y_3 mediante δ, otteniamo la funzione di Lagrange dell'oscillazione trasversale nella forma

$$L = \frac{m_A}{2}(\dot{y}_1^2 + \dot{y}_3^2) + \frac{m_B}{2}\dot{y}_2^2 - \frac{k_2 l^2}{2}\delta^2 = \frac{m_A m_B}{4\mu}l^2\dot{\delta}^2 - \frac{k_2 l^2}{2}\delta^2,$$

da cui la frequenza è

$$\omega_{s2} = \sqrt{\frac{2k_2\mu}{m_A m_B}}.$$

2. Risolvere problema 1 per una molecola ABA di forma triangolare (fig. 29).

Soluzione. Secondo le (24,1) e (24,2) le componenti degli spostamenti $\mathbf{u}$ degli atomi nelle direzioni X ed Y (fig. 29) sono legate dalle relazioni

$$m_A(x_1+x_3)+m_B x_2=0,$$

$$m_A(y_1+y_3)+m_B y_2=0,$$

$$\operatorname{sen}\alpha\,(y_1-y_3)-\cos\alpha\,(x_1+x_3)=0.$$

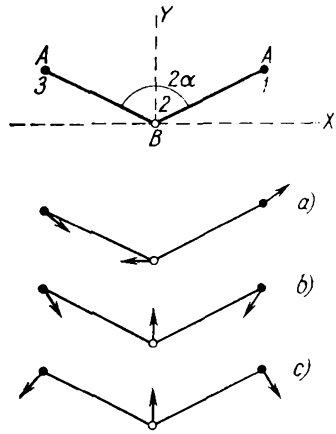


Fig. 29

Le variazioni δl_1 e δl_2 delle distanze $A-B$ e $B-A$ si ottengono proiettando i vettori $\mathbf{u}_1-\mathbf{u}_2$ ed $\mathbf{u}_3-\mathbf{u}_2$ sulle rette AB e BA:

$$\delta l_1=(x_1-x_2)\operatorname{sen}\alpha+(y_1-y_2)\cos\alpha,$$

$$\delta l_2=-(x_3-x_2)\operatorname{sen}\alpha+(y_3-y_2)\cos\alpha.$$

La variazione dell'angolo ABA si ottiene proiettando gli stessi vettori sulle direzioni perpendicolari ai segmenti AB e BA:

$$\delta=\frac{1}{l}\left[(x_1-x_2)\cos\alpha-(y_1-y_2)\operatorname{sen}\alpha\right]+$$

$$+\frac{1}{l}\left[-(x_3-x_2)\cos\alpha-(y_3-y_2)\operatorname{sen}\alpha\right].$$

La funzione di Lagrange della molecola è

$$L=\frac{m_A}{2}(\dot{\mathbf{u}}_1^2+\dot{\mathbf{u}}_3^2)+\frac{m_B}{2}\dot{\mathbf{u}}_2^2-\frac{k_1}{2}(\delta l_1^2+\delta l_2^2)-\frac{k_2 l^2}{2}\delta^2.$$

Introducendo le nuove coordinate

$$Q_a=x_1+x_3,\quad q_{s1}=x_1-x_3,\quad q_{s2}=y_1+y_3,$$

le componenti dei vettori $\mathbf{u}$ si possono esprimere con le seguenti relazioni:

$$x_1=\frac{1}{2}(Q_a+q_{s1}),\qquad x_3=\frac{1}{2}(Q_a-q_{s1}),\qquad x_2=-\frac{m_A}{m_B}Q_a,$$

$$y_1=\frac{1}{2}(q_{s2}+Q_a\operatorname{ctg}\alpha),\qquad y_3=\frac{1}{2}(q_{s2}-Q_a\operatorname{ctg}\alpha),\qquad y_2=-\frac{m_A}{m_B}q_{s2}.$$

Dopo i necessari calcoli, otteniamo per la funzione di Lagrange

$$L=\frac{m_A}{4}\left(\frac{2m_A}{m_B}+\frac{1}{\operatorname{sen}^2\alpha}\right)\dot{Q}_a^2+\frac{m_A}{4}\dot{q}_{s1}^2+\frac{m_A\mu}{4m_B}\dot{q}_{s2}^2-$$

$$-Q_a^2\frac{k_1}{4}\left(\frac{2m_A}{m_B}+\frac{1}{\operatorname{sen}^2\alpha}\right)\left(1+\frac{2m_A}{m_B}\operatorname{sen}^2\alpha\right)-$$

$$-\frac{q_{s1}^2}{4}(k_1\operatorname{sen}^2\alpha+2k_2\cos^2\alpha)-q_{s2}^2\frac{\mu^2}{4m_B^2}(k_1\cos^2\alpha+2k_2\operatorname{sen}^2\alpha)+$$

$$+q_{s1}q_{s2}\frac{\mu}{2m_B}(2k_2-k_1)\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha.$$

Risulta da questa relazione che la coordinata Q_a corrisponde ad un'oscillazione normale di frequenza

$$\omega_a^2=\frac{k_1}{m_A}\left(1+\frac{2m_A}{m_B}\operatorname{sen}^2\alpha\right),$$

antisimmetrica rispetto all'asse Y ($x_1=x_3$, $y_1=-y_3$; fig. 29,*a*).

Le coordinate q_{s1} e q_{s2} corrispondono insieme a due oscillazioni (simmetriche rispetto all'asse Y: $x_1 = -x_3$, $y_1 = y_3$; fig. 29,*b* e *c*) le cui frequenze ω_{s1} e ω_{s2} sono definite come radici dell'equazione caratteristica di secondo grado in ω^2:

$$\omega^4 - \omega^2 \left[\frac{k_1}{m_A} \left(1 + \frac{2m_A}{m_B} \cos^2\alpha \right) + \frac{2k_2}{m_A} \left(1 + \frac{2m_A}{m_B} \operatorname{sen}^2\alpha \right) \right] + \frac{2\mu k_1 k_2}{m_B m_A^2} = 0.$$

Per $2\alpha = \pi$ queste frequenze coincidono con quelle che sono state trovate nel problema 1.

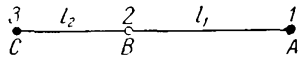


Fig. 30

3. Risolvere il problema 1 per una molecola lineare asimmetrica ABC (fig. 30).

Soluzione. Gli spostamenti longitudinali (x) e trasversali (y) degli atomi sono legati dalle relazioni

$$m_A x_1 + m_B x_2 + m_C x_3 = 0, \quad m_A y_1 + m_B y_2 + m_C y_3 = 0,$$
$$m_A l_1 y_1 = m_C l_2 y_3.$$

Scriviamo l'energia potenziale di allungamento e di curvatura nella forma

$$\frac{k_1}{2} (\delta l_1)^2 + \frac{k_1'}{2} (\delta l_2)^2 + \frac{k_2 l^2}{2} \delta^2$$

($2l = l_1 + l_2$). Calcoli analoghi a quelli del problema 1 ci danno il valore

$$\omega_l^2 = \frac{k_2 l^2}{l_1^2 l_2^2} \left(\frac{l_1^2}{m_C} + \frac{l_2^2}{m_A} + \frac{4l^2}{m_B} \right)$$

per la frequenza dell'oscillazione trasversale e l'equazione di secondo grado (in ω^2)

$$\omega^4 - \omega^2 \left[k_1 \left(\frac{1}{m_A} + \frac{1}{m_B} \right) + k_1' \left(\frac{1}{m_B} + \frac{1}{m_C} \right) \right] + \frac{\mu k_1 k_1'}{m_A m_B m_C} = 0$$

per le frequenze ω_{l1} e ω_{l2} delle due oscillazioni longitudinali.

§ 25. *Oscillazioni smorzate*

Finora abbiamo sempre supposto che il moto dei corpi avvenga nel vuoto o che si possa trascurare l'influenza del mezzo sul moto. In realtà, quando un corpo si muove in un mezzo, quest'ultimo esercita una resistenza che tende a rallentare il moto. In questo caso l'energia del corpo si trasforma alla fine in calore o, come si dice, viene dissipata.

In queste condizioni il moto non è piú un processo puramente meccanico, ed il suo studio richiede che si tenga conto del movimento del mezzo stesso e dello stato termico interno sia del mezzo che del

corpo. In particolare, non si può in generale considerare che l'accelerazione di un corpo in moto sia funzione soltanto delle sue coordinate e della velocità in un istante dato; in altri termini, non esistono equazioni del moto nel senso comunemente usato in meccanica. In tal modo, il problema del moto di un corpo in un mezzo non è piú un problema di meccanica.

Esiste, però, tutta una categoria di casi in cui il moto in un mezzo può essere descritto approssimativamente mediante le equazioni della meccanica, introducendovi alcuni termini supplementari. Tale è il caso, per esempio, delle oscillazioni di frequenze piccole a confronto con le frequenze che caratterizzano i processi interni dissipativi del mezzo. Se questa condizione è soddisfatta si può ritenere che il corpo sia soggetto all'azione di una *forza di attrito* dipendente (per un dato mezzo omogeneo) soltanto dalla sua velocità.

Se poi questa velocità è sufficientemente piccola, si può sviluppare in potenze di essa la forza di attrito. Il termine di ordine zero dello sviluppo è nullo, poiché nessuna forza di attrito agisce su un corpo immobile, e il primo termine non nullo dello sviluppo è quindi proporzionale alla velocità. In tal modo la forza generalizzata d'attrito f_{attr} agente su un sistema che compie piccole oscillazioni unidimensionali con coordinata generalizzata x può essere scritta nella forma

$$f_{\text{attr}} = -\alpha\dot{x},$$

dove α è un coefficiente positivo e il segno meno sta a significare che la forza agisce nel verso opposto a quello della velocità. Aggiungendo questa forza al secondo membro dell'equazione del moto, otteniamo (cfr. (21,4))

$$m\ddot{x} = -kx - \alpha\dot{x}. \tag{25,1}$$

Dividiamo questa espressione per m e poniamo

$$\frac{k}{m} = \omega_0^2, \quad \frac{\alpha}{m} = 2\lambda. \tag{25,2}$$

dove ω_0 è la frequenza delle oscillazioni libere del sistema in assenza di attrito. La grandezza λ si chiama *coefficiente di smorzamento*[1]).

La nostra equazione è

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = 0. \tag{25,3}$$

Seguendo le regole generali di risoluzione delle equazioni lineari a coefficienti costanti, poniamo $x = e^{rt}$ e otteniamo per r l'equazione caratteristica

$$r^2 + 2\lambda r + \omega_0^2 = 0.$$

---

[1]) Il prodotto adimensionale λT (dove $T = 2\pi/\omega$ è il periodo) è detto decremento logaritmico di smorzamento.

La soluzione generale dell'equazione (25,3) è

$$x = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}, \quad r_{1,2} = -\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}.$$

Qui occorre distinguere due casi.

Se $\lambda < \omega_0$, abbiamo per r due valori complessi coniugati. La soluzione generale dell'equazione del moto può allora essere scritta nella forma

$$x = \mathrm{Re}\left\{A \exp\left(-\lambda t + i_t \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}\right)\right\},$$

dove A è una costante arbitraria complessa. Questa formula si può scrivere anche come segue:

$$x = a e^{-\lambda t} \cos(\omega t + \alpha), \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}, \tag{25,4}$$

dove a ed α sono costanti reali. Queste formule descrivono il moto delle cosiddette *oscillazioni smorzate*. Un'oscillazione smorzata può essere considerata come oscillazione armonica con ampiezza decrescente esponenzialmente. La velocità con la quale l'ampiezza decresce è determinata dal coefficiente λ, e la « frequenza » ω delle oscillazioni è minore di quella delle oscillazioni libere in assenza d'attrito; per $\lambda \ll \omega_0$ la differenza tra ω e ω_0 è un infinitesimo del secondo ordine. Una diminuzione della frequenza in presenza d'attrito ci si doveva aspettare a priori, poiché l'attrito in generale rallenta il moto.

Se $\lambda \ll \omega_0$, l'ampiezza dell'oscillazione smorzata quasi non varia nel corso di un periodo $2\pi/\omega$. In questo caso, ha senso considerare solo i valori medi (nel corso di un periodo) dei quadrati della coordinata e della velocità, trascurando la variazione del fattore $e^{-\lambda t}$. Questi quadrati medi sono evidentemente proporzionali a $e^{-2\lambda t}$. Perciò anche l'energia del sistema diminuisce in media secondo la legge

$$\overline{E} = E_0 e^{-2\lambda t}, \tag{25,5}$$

dove E_0 è il valore iniziale dell'energia.

Sia ora $\lambda > \omega_0$. In questo caso entrambi i valori di r sono reali e negativi. La forma generale della soluzione è

$$x = c_1 e^{-\left(\lambda - \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}\right)t} + c_2 e^{-\left(\lambda + \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}\right)t}. \tag{25,6}$$

Vediamo che in questo caso, che si presenta per un attrito sufficientemente grande, il moto consiste nella diminuzione di $|x|$, cioè nell'approssimarsi asintoticamente (per $t \to \infty$) alla posizione d'equilibrio. Questo tipo di moto è chiamato *smorzamento aperiodico*.

Considerando infine il caso particolare in cui $\lambda = \omega_0$, troviamo che l'equazione caratteristica ha una sola radice (doppia) $r = -\lambda$.

Com'è noto, la soluzione generale dell'equazione differenziale è:

$$x = (c_1 + c_2 t)\, e^{-\lambda t}. \tag{25,7}$$

Questo è un caso particolare di smorzamento aperiodico che, come il precedente, non ha piú carattere oscillatorio.

Per un sistema con piú gradi di libertà, le forze d'attrito generalizzate, corrispondenti alle coordinate x_i, sono funzioni lineari delle velocità del tipo

$$f_{i\,\mathrm{attr}} = -\sum_k \alpha_{ik} \dot{x}_k. \tag{25,8}$$

Partendo da considerazioni puramente meccaniche, non si può trarre nessuna conclusione riguardo alla simmetria dei coefficienti α_{ik} rispetto agli indici i e k. I metodi della fisica statistica [1]) permettono però di mostrare che sussiste sempre l'uguaglianza

$$\alpha_{ik} = \alpha_{ki}. \tag{25,9}$$

Di conseguenza, le espressioni (25,8) si possono scrivere come derivate

$$f_{i\,\mathrm{attr}} = -\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \tag{25,10}$$

della forma quadratica

$$F = \frac{1}{2} \sum_{i,\,k} \alpha_{ik} \dot{x}_i \dot{x}_k, \tag{25,11}$$

chiamata *funzione di dissipazione*.

Le forze (25,10) debbono essere aggiunte al secondo membro delle equazioni di Lagrange

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = \frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}. \tag{25,12}$$

La funzione di dissipazione ha di per sé un significato fisico importante: essa determina l'intensità della dissipazione d'energia nel sistema. Di questo è facile convincersi calcolando la derivata rispetto al tempo dell'energia meccanica del sistema. Abbiamo:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\sum_i \dot{x}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - L\right) = \sum_i \dot{x}_i \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial L}{\partial x_i}\right) = -\sum_i \dot{x}_i \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}.$$

Poiché F è una funzione quadratica delle velocità, per il teorema di Eulero sulle funzioni omogenee la somma del secondo membro dell'uguaglianza vale $2F$. Quindi

$$\frac{dE}{dt} = -2F, \tag{25,13}$$

---

[1]) Vedi *Fisica statistica*, § 121.

cioè la velocità di variazione dell'energia del sistema è data dal doppio della funzione di dissipazione. Poiché i processi dissipativi causano una diminuzione d'energia, deve sempre essere $F > 0$, cioè la forma quadratica (25,11) è sempre positiva.

Le equazioni delle piccole oscillazioni in presenza d'attrito si ottengono aggiungendo le forze (25,8) al secondo membro delle equazioni (23,5):

$$\sum_k m_{ik}\ddot{x}_k + \sum_k k_{ik}x_k = -\sum_k \alpha_{ik}\dot{x}_k. \tag{25,14}$$

Ponendo in queste equazioni

$$x_k = A_k e^{rt},$$

e dividendo poi per e^{rt}, otteniamo un sistema di equazioni algebriche lineari per le costanti A_k

$$\sum_k (m_{ik}r^2 + \alpha_{ik}r + k_{ik})\, A_{ik} = 0. \tag{25,15}$$

Ponendo uguale a zero il determinante di questo sistema, troviamo l'equazione caratteristica che dà i valori di r:

$$|\, m_{ik}r^2 + \alpha_{ik}r + k_{ik}\,| = 0. \tag{25,16}$$

L'equazione ottenuta è di grado $2s$ rispetto ad r. Poiché tutti i suoi coefficienti sono reali, le sue radici sono o reali o complesse coniugate a coppie. Le radici reali sono sempre negative, mentre le radici complesse hanno solo la parte reale negativa. Se questo non si verificasse, le coordinate, le velocità, e con esse l'energia del sistema, crescerebbero esponenzialmente col tempo, mentre la presenza di forze dissipative deve portare ad una diminuzione dell'energia.

§ 26. *Oscillazioni forzate in presenza d'attrito*

Lo studio delle oscillazioni forzate in presenza d'attrito è del tutto analogo a quello delle oscillazioni senza attrito (cfr. § 22). Ci soffermeremo qui dettagliatamente sul caso di particolare interesse quando la forza che provoca le oscillazioni è periodica.

Aggiungendo al secondo membro dell'equazione (25,1) la forza esterna $f \cos \gamma t$ e dividendo per m, si ottiene l'equazione del moto nella forma

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{f}{m}\cos \gamma t. \tag{26,1}$$

Poiché è comodo risolvere questa equazione in forma complessa, sostituiamo $\cos \gamma t$ con $e^{i\gamma t}$:

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{f}{m} e^{i\gamma t}.$$

Cercando un integrale particolare nella forma $x = Be^{i\gamma t}$, troviamo per B:

$$B = \frac{f}{m(\omega_0^2 - \gamma^2 + 2i\lambda\gamma)}. \tag{26,2}$$

Scrivendo B nella forma $be^{i\delta}$, abbiamo per b e δ:

$$b = \frac{f}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \gamma^2)^2 + 4\lambda^2\gamma^2}}, \quad \operatorname{tg}\delta = \frac{2\lambda\gamma}{\gamma^2 - \omega_0^2}. \tag{26,3}$$

Separando infine la parte reale dall'espressione $Be^{i\gamma t} = be^{i(\gamma t + \delta)}$, otteniamo un integrale particolare dell'equazione (26,1); aggiungendo a questo integrale la soluzione generale dell'equazione senza il secondo membro (che noi scriviamo per il caso in cui $\omega_0 > \lambda$), otteniamo:

$$x = ae^{-\lambda t}\cos(\omega t + \alpha) + b\cos(\gamma t + \delta). \tag{26,4}$$

Poiché il primo termine decresce esponenzialmente col tempo, dopo un intervallo di tempo abbastanza lungo resterà soltanto il secondo termine:

$$x = b\cos(\gamma t + \delta). \tag{26,5}$$

Sebbene l'espressione (26,3), che dà l'ampiezza b di una oscillazione forzata, cresca quando la frequenza γ tende a ω_0, essa non assume però valori infiniti, come questo è avvenuto nel caso di risonanza in assenza d'attrito. Per un'ampiezza data della forza f, l'ampiezza delle oscillazioni è massima quando la frequenza $\gamma = \sqrt{\omega_0^2 - 2\lambda^2}$; se $\lambda \ll \omega_0$, il valore differisce da ω_0 solo per un infinitesimo del secondo ordine.

Consideriamo la regione in prossimità della risonanza. Poniamo $\gamma = \omega_0 + \varepsilon$, dove ε è una quantità piccola; supponiamo anche che $\lambda \ll \omega_0$. Si può allora considerare nella (26,2) con buona approssimazione

$$\gamma^2 - \omega_0^2 = (\gamma + \omega_0)(\gamma - \omega_0) \approx 2\omega_0\varepsilon, \quad 2i\lambda\gamma \approx 2i\lambda\omega_0,$$

cosicché

$$B = -\frac{f}{2m(\varepsilon - i\lambda)\omega_0} \tag{26,6}$$

o

$$b = \frac{f}{2m\omega_0\sqrt{\varepsilon^2 + \lambda^2}}, \quad \operatorname{tg}\delta = \frac{\lambda}{\varepsilon}. \tag{26,7}$$

Notiamo il carattere particolare dell'andamento della variazione della differenza di fase δ fra l'oscillazione del sistema e la forza esterna al variare della frequenza di quest'ultima. Questa differenza è sempre negativa, cioè l'oscillazione è « in ritardo » rispetto alla forza esterna. Lontano dalla frequenza di risonanza, per valori

$\gamma < \omega_0$, δ tende a zero, e per $\gamma > \omega_0$ tende a $-\pi$. La variazione di δ da zero a $-\pi$ si effettua in una stretta regione di frequenze (di larghezza $\sim \lambda$) vicine a ω_0; per $\gamma = \omega_0$ la differenza di fase assume il valore $-\frac{\pi}{2}$. Notiamo a questo proposito che in assenza d'attrito la fase dell'oscillazione forzata, per una variazione pari a π, fa un salto per $\gamma = \omega_0$ (il secondo termine nella (22,4) cambia di segno); l'attrito « smussa » questo salto.

Stabilizzato il moto, quando il sistema compie le oscillazioni forzate (26,5), la sua energia resta costante. Il sistema assorbe continuamente (dalla sorgente di una forza esterna) energia, che viene

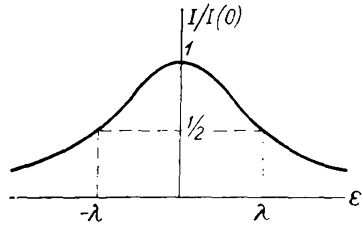


Fig. 31

dissipata a causa dell'attrito. Indichiamo con $I(\gamma)$ la quantità di energia assorbita in media nell'unità di tempo e considerata come funzione della frequenza della forza esterna. Secondo la (25,13) si ha

$$I(\gamma) = 2\overline{F},$$

dove $\overline{F}$ è il valore medio (per un periodo d'oscillazione) della funzione di dissipazione. Per un moto unidimensionale l'espressione (25,11) della funzione di dissipazione assume la forma $F = \alpha\dot{x}^2/2 = \lambda m\dot{x}^2$. Sostituendo qui la (26,5), si ottiene:

$$F = \lambda m b^2\gamma^2 \operatorname{sen}^2(\gamma t + \delta).$$

Poiché il valore medio del quadrato del seno rispetto al tempo è uguale a 1/2, si ha

$$I(\gamma) = \lambda m b^2\gamma^2. \tag{26,8}$$

Vicino alla risonanza, sostituendo l'ampiezza dell'oscillazione ricavata dalla (26,7), abbiamo

$$I(\varepsilon) = \frac{f^2}{4m}\frac{\lambda}{\varepsilon^2+\lambda^2}. \tag{26,9}$$

Questo tipo di dipendenza dell'assorbimento di energia dalla frequenza si chiama *dispersivo*. Il valore di $|\varepsilon|$ per cui $I(\varepsilon)$ diminuisce al valore metà del suo valore massimo raggiunto per $\varepsilon = 0$ si chiama *semilarghezza* della curva di risonanza (fig. 31).

Dalla formula (26,9) si vede che, nel caso considerato, questa larghezza coincide con il coefficiente di smorzamento λ. L'altezza del valore massimo

$$I(0) = \frac{f^2}{4m\lambda}$$

è inversamente proporzionale a λ. Cosí, al decrescere del coefficiente di smorzamento, la curva di risonanza diventa piú stretta e piú alta; in altre parole, il suo massimo diventa piú acuto. Però l'area compresa sotto la curva di risonanza resta immutata.

Questa area è data dall'integrale

$$\int_0^\infty I(\gamma)\, d\gamma = \int_{-\omega_0}^\infty I(\varepsilon)\, d\varepsilon.$$

Poiché $I(\varepsilon)$ decresce rapidamente al crescere di $|\varepsilon|$, cosicché la regione dei grandi valori di $|\varepsilon|$ non ha un'importanza sostanziale, si può nell'integrazione usare per $I(\varepsilon)$ la forma (26,9) e prendere come limite inferiore $-\infty$. Allora

$$\int_{-\infty}^\infty I(\varepsilon)\, d\varepsilon = \frac{f^2\lambda}{4m} \int_{-\infty}^\infty \frac{d\varepsilon}{\varepsilon^2+\lambda^2} = \frac{\pi f^2}{4m}. \tag{26,10}$$

PROBLEMA

Determinare le oscillazioni forzate in presenza d'attrito sotto l'azione di una forza esterna $f = f_0 e^{\alpha t} \cos \gamma t$.

Soluzione. Risolviamo l'equazione del moto in forma complessa

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{f_0}{m} e^{\alpha t + i\gamma t}.$$

Separiamo poi la parte reale della soluzione. Otteniamo come risultato un'oscillazione forzata nella forma:

$$x = b e^{\alpha t} \cos(\gamma t + \delta),$$

dove

$$b = \frac{f_0}{m\sqrt{(\omega_0^2+\alpha^2-\gamma^2+2\alpha\lambda)^2 + 4\gamma^2(\alpha+\lambda)^2}},$$

$$\operatorname{tg}\delta = -\frac{2\gamma(\alpha+\lambda)}{\omega_0^2-\gamma^2+\alpha^2+2\alpha\lambda}.$$

§ 27. *Risonanza parametrica*

Esistono sistemi oscillanti non isolati in cui l'azione esterna si traduce in variazione dei loro parametri con il tempo [1]).

Un sistema ad una dimensione ha per parametri i coefficienti m e k nella funzione di Lagrange (21,3); se essi dipendono dal tempo,

[1]) Un esempio semplice di questo genere è un pendolo il cui punto di sospensione compie un dato moto periodico lungo la verticale (vedi problema 3).

l'equazione del moto si scrive:

$$\frac{d}{dt}(m\dot{x}) + kx = 0. \tag{27,1}$$

Se in luogo di t introduciamo una nuova variabile indipendente τ tale che $d\tau = dt/m\,(t)$, questa equazione assume la forma

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + mkx = 0.$$

Perciò di fatto, senza alcuna perdita di generalità, è sufficiente considerare un'equazione del moto del tipo

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2(t)\,x = 0, \tag{27,2}$$

che si ottiene se nella (27,1) poniamo m uguale a costante.

La forma della funzione $\omega\,(t)$ viene data dalle condizioni del problema; supponiamo che questa funzione sia periodica con una frequenza γ (e di periodo $T = 2\pi/\gamma$). Ciò vuol dire che

$$\omega\,(t + T) = \omega\,(t)$$

e, di conseguenza, tutta l'equazione (27,2) è invariante rispetto alla trasformazione $t \to t + T$. Perciò se $x\,(t)$ è una soluzione dell'equazione, anche la funzione $x\,(t + T)$ è una soluzione della stessa equazione. In altri termini, se $x_1\,(t)$ ed $x_2\,(t)$ sono due integrali indipendenti dell'equazione (27,2), con la sostituzione $t \to t + T$ essi si trasformano linearmente l'uno nell'altro. Si può [1]) inoltre scegliere x_1 ed x_2 in modo tale che sostituendo t con $t + T$ la loro variazione si riduca semplicemente alla moltiplicazione per un fattore costante:

$$x_1\,(t + T) = \mu_1 x_1\,(t), \quad x_2\,(t + T) = \mu_2 x_2\,(t).$$

La forma più generale delle funzioni aventi questa proprietà è

$$x_1\,(t) = \mu_1^{t/T}\Pi_1\,(t), \quad x_2\,(t) = \mu_2^{t/T}\Pi_2\,(t), \tag{27,3}$$

dove $\Pi_1\,(t)$ e $\Pi_2\,(t)$ sono funzioni semplicemente periodiche del tempo (di periodo T).

Le costanti μ_1 e μ_2 in queste funzioni debbono essere legate da una determinata relazione. Infatti, moltiplicando le equazioni

$$\ddot{x}_1 + \omega^2(t)\,x_1 = 0, \quad \ddot{x}_2 + \omega^2(t)\,x_2 = 0$$

rispettivamente per x_2 ed x_1 e sottraendo l'una dall'altra, si ottiene:

$$\ddot{x}_1 x_2 - \ddot{x}_2 x_1 = \frac{d}{dt}(\dot{x}_1 x_2 - x_1 \dot{x}_2) = 0$$

o

$$\dot{x}_1 x_2 - x_1 \dot{x}_2 = \text{costante}. \tag{27,4}$$

[1]) A condizione che le costanti μ_1 e μ_2 non coincidano.

Ma per due qualsiasi funzioni $x_1(t)$ e $x_2(t)$ del tipo (27,3) il primo membro di questa uguaglianza viene moltiplicato per $\mu_1\mu_2$ quando l'argomento t è sostituito da $t+T$. Perché l'uguaglianza (27,4) sia soddisfatta, è indispensabile quindi che

$$\mu_1\mu_2 = 1. \tag{27,5}$$

Altre conclusioni sulle costanti μ_1 e μ_2 si possono trarre nel caso in cui i coefficienti dell'equazione (27,2) sono reali. Se $x(t)$ è un integrale di questa equazione, la funzione complessa coniugata $x^*(t)$ deve soddisfare la stessa equazione. Quindi la coppia di costanti μ_1, μ_2 deve coincidere con la coppia μ_1^*, μ_2^*, cioè o deve verificarsi il caso $\mu_1 = \mu_2^*$ o μ_1 e μ_2 debbono essere reali. Nel primo caso, tenendo conto della (27,5), si ha $\mu_1 = 1/\mu_1^*$, cioè $|\mu_1|^2 = |\mu_2|^2 = 1$; le costanti μ_1 e μ_2 hanno modulo uno.

Nel secondo caso, i due integrali indipendenti dell'equazione (27,2) sono della forma

$$x_1(t) = \mu^{t/T}\Pi_1(t), \quad x_2(t) = \mu^{-t/T}\Pi_2(t) \tag{27,6}$$

dove μ è un numero reale positivo o negativo diverso da uno. Una di queste funzioni (la prima se $|\mu| > 1$ o la seconda se $|\mu| < 1$) cresce esponenzialmente col tempo. Ciò vuol dire che lo stato di quiete del sistema (nella posizione d'equilibrio $x = 0$) è instabile: è sufficiente un allontanamento arbitrariamente piccolo da questo stato perché lo spostamento x provocato cominci a crescere rapidamente col tempo. Questo fenomeno si chiama *risonanza parametrica*.

Occorre sottolineare che, se x e $\dot{x}$ inizialmente nulli, saranno nulli anche nei momenti successivi, a differenza di quanto avviene nella risonanza ordinaria (§ 22) in cui un aumento dello spostamento con il tempo (proporzionalmente a t) si verifica anche se il suo valore iniziale è zero.

Mettiamo in luce le condizioni per cui si verifica la risonanza parametrica nell'importante caso quando la funzione $\omega(t)$ differisce poco da una grandezza costante ω_0 ed è una funzione periodica semplice

$$\omega^2(t) = \omega_0^2(1 + h\cos\gamma t), \tag{27,7}$$

dove la costante $h \ll 1$ (considereremo h positiva, ciò che si può sempre ottenere facilmente con una scelta adeguata dell'origine dei tempi). Come vedremo più avanti, si ha una risonanza parametrica della massima intensità quando la frequenza della funzione $\omega(t)$ è vicina al doppio della frequenza ω_0. Poniamo quindi:

$$\gamma = 2\omega_0 + \varepsilon,$$

dove $\varepsilon \ll \omega_0$.

Cercheremo una soluzione dell'equazione del moto [1])

$$\ddot{x} + \omega_0^2 [1 + h \cos (2\omega_0 + \varepsilon) t] x = 0 \tag{27,8}$$

nella forma

$$x = a(t) \cos \left(\omega_0 + \frac{\varepsilon}{2}\right) t + b(t) \operatorname{sen} \left(\omega_0 + \frac{\varepsilon}{2}\right) t, \tag{27,9}$$

dove $a(t)$ e $b(t)$ sono funzioni lentamente (a confronto con i fattori coseno e seno) variabili del tempo. È evidente che una soluzione di questo tipo non è esatta. In realtà la funzione $x(t)$ contiene anche termini cui frequenze differiscono da $\omega_0 + \varepsilon/2$ di un multiplo intero $(2\omega_0 + \varepsilon)$; questi termini sono, però, infinitesimi d'ordine superiore rispetto ad h, e nella prima approssimazione si possono trascurare (vedi problema 1).

Sostituiamo la (27,9) con la (27,8) e, nei nostri calcoli, conserviamo soltanto i termini del primo ordine rispetto ad ε. Supponiamo inoltre che $\dot{a} \sim \varepsilon a$, $\dot{b} \sim \varepsilon b$ (la validità di questa ipotesi in condizioni di risonanza verrà confermata dal risultato). I prodotti dei fattori trigonometrici vanno sviluppati in somme

$$\cos \left(\omega_0 + \frac{\varepsilon}{2}\right) t \cdot \cos (2\omega_0 + \varepsilon) t =$$
$$= \frac{1}{2} \cos \left(3\omega_0 + \frac{3\varepsilon}{2}\right) t + \frac{1}{2} \cos \left(\omega_0 + \frac{\varepsilon}{2}\right) t;$$

ecc. e, conformemente a quanto detto sopra, vanno omessi i termini con frequenze $3(\omega_0 + \varepsilon/2)$. Si ottiene cosí

$$-\left(2\dot{a} + b\varepsilon + \frac{h\omega_0}{2} b\right) \omega_0 \operatorname{sen} \left(\omega_0 + \frac{\varepsilon}{2}\right) t +$$
$$+ \left(2\dot{b} - a\varepsilon + \frac{h\omega_0}{2} a\right) \omega_0 \cos \left(\omega_0 + \frac{\varepsilon}{2}\right) t = 0.$$

Perché questa uguaglianza sia soddisfatta, occorre che i coefficienti di ciascuno dei fattori seno e coseno si annullino contemporaneamente. Otteniamo cosí un sistema di due equazioni differenziali lineari per le funzioni $a(t)$ e $b(t)$. Seguendo regole generali, cerchiamo una soluzione proporzionale ad e^{st}. Si ha allora

$$sa + \frac{1}{2}\left(\varepsilon + \frac{h\omega_0}{2}\right) b = 0,$$
$$\frac{1}{2}\left(\varepsilon - \frac{h\omega_0}{2}\right) a - sb = 0,$$

e la condizione di compatibilità di queste due equazioni algebriche ci dà:

$$s^2 = \frac{1}{4}\left[\left(\frac{h\omega_0}{2}\right)^2 - \varepsilon^2\right]. \tag{27,10}$$

[1]) Un'equazione di questo tipo (con γ ed h arbitrarie) si chiama, nella fisica matematica, equazione di Mathieu.

La condizione perché si abbia la risonanza parametrica è che s sia reale (cioè $s^2 > 0$) [1]. Cosí, la risonanza parametrica ha luogo nell'intervallo

$$-\frac{h\omega_0}{2} < \varepsilon < \frac{h\omega_0}{2} \tag{27,11}$$

intorno alla frequenza $2\omega_0$ [2]. La larghezza di questo intervallo è proporzionale ad h, e sono dello stesso ordine i valori del coefficiente di amplificazione delle oscillazioni s nell'intervallo.

La risonanza parametrica ha luogo anche per frequenze γ di variazione del parametro del sistema vicine a valori del tipo $2\omega_0/n$, dove n è un numero intero qualsiasi. Tuttavia la larghezza degli intervalli di risonanza (intervalli d'instabilità) con l'aumentare di n diminuisce rapidamente, come h^n (vedi problema 2). Diminuiscono nella stessa maniera anche i valori del coefficiente di amplificazione delle oscillazioni all'interno di questi intervalli.

Il fenomeno di risonanza parametrica esiste anche in presenza d'attrito debole nel sistema, ma l'intervallo d'instabilità in questo caso si restringe alquanto. Come abbiamo visto nel § 25, l'attrito provoca uno smorzamento dell'ampiezza delle oscillazioni secondo la legge $e^{-\lambda t}$. L'amplificazione delle oscillazioni nel caso di risonanza parametrica segue quindi la legge $e^{(s-\lambda)t}$ (con s positiva data dalla soluzione del problema senza attrito), e il limite dell'intervallo d'instabilità è determinato dall'uguaglianza $s - \lambda = 0$. Cosí, ricavando s dalla (27,10), otteniamo per l'intervallo di risonanza, in luogo della (27,11), la disuguaglianza

$$-\sqrt{\left(\frac{h\omega_0}{2}\right)^2 - 4\lambda^2} < \varepsilon < \sqrt{\left(\frac{h\omega_0}{2}\right)^2 - 4\lambda^2}. \tag{27,12}$$

È opportuno a questo proposito sottolineare che la risonanza è possibile non per un'ampiezza h arbitrariamente piccola, ma per un'ampiezza superiore ad una determinata « soglia » h_k, che nel caso della (27,12) è uguale a:

$$h_k = \frac{4\lambda}{\omega_0}.$$

Si può mostrare che, per risonanze in prossimità delle frequenze $2\omega_0/n$, il valore di soglia h_k è proporzionale a $\lambda^{1/n}$, cioè cresce col crescere di n.

---

[1]) La costante μ nella (27,6) è legata con s dalla relazione $\mu = -e^{s\pi/\omega_0}$ (sostituendo t con $t + 2\pi/2\omega_0$, coseno e seno nella (27,9) cambiano segno).

[2]) Se ci interessano soltanto i limiti dell'intervallo di risonanza (e non proprio l'espressione per s entro questo), si possono semplificare i calcoli, notando che su questi limiti $s = 0$, cioè i coefficienti a e b nella (27,9) sono costanti; troviamo allora immediatamente i valori $\varepsilon = \pm h\omega_0/2$ corrispondenti limiti dell'interrallo (27,11).

PROBLEMI

1. Determinare a meno di termini d'ordine superiore ad h^2 i limiti dell'intervallo d'instabilità, per una risonanza in prossimità di $\gamma = 2\omega_0$.

Soluzione. Cerchiamo per l'equazione (27,8) una soluzione del tipo

$$x = a_0 \cos\left(\omega_0 + \frac{\varepsilon}{2}\right) t + b_0 \operatorname{sen}\left(\omega_0 + \frac{\varepsilon}{2}\right) t + \\ + a_1 \cos 3\left(\omega_0 + \frac{\varepsilon}{2}\right) t + b_1 \operatorname{sen} 3\left(\omega_0 + \frac{\varepsilon}{2}\right) t,$$

dove si tiene conto [contrariamente alla (27,9)] anche dei termini d'ordine superiore rispetto ad h. Poiché ci interessano soltanto i limiti dell'intervallo d'instabilità, supponiamo costanti i coefficienti a_0, b_0, a_1, b_1 (conformemente alla nota 2 alla pag. 131). Sostituendo nella (27,8), sviluppiamo in somme i prodotti di funzioni trigonometriche, tralasciando i termini di frequenze $5\left(\omega_0 + \frac{\varepsilon}{2}\right)$ dei quali si avrebbe bisogno soltanto per una approssimazione superiore. Otteniamo:

$$\left[-a_0\left(\omega_0\varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{4}\right) + \frac{h\omega_0^2}{2} a_0 + \frac{h\omega_0^2}{2} a_1\right] \cos\left(\omega_0 + \frac{\varepsilon}{2}\right) t + \\ + \left[-b_0\left(\omega_0\varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{4}\right) - \frac{h\omega_0^2}{3} b_0 + \frac{h\omega_0^2}{2} b_1\right] \operatorname{sen}\left(\omega_0 + \frac{\varepsilon}{2}\right) t + \\ + \left[\frac{h\omega_0^2}{2} a_0 - 8\omega_0^2 a_1\right] \cos 3\left(\omega_0 + \frac{\varepsilon}{2}\right) t + \\ + \left[\frac{h\omega_0^2}{2} b_0 - 8\omega_0^2 b_1\right] \operatorname{sen} 3\left(\omega_0 + \frac{\varepsilon}{2}\right) t = 0.$$

Nei termini di frequenze $\omega_0 + \varepsilon/2$ vi sono conservati infinitesimi del primo e del secondo ordine, e nei termini di frequenze $3\left(\omega_0 + \frac{\varepsilon}{2}\right)$ quelli del primo ordine. Ciascuna delle espressioni in parentesi quadre deve annullarsi separatamente. Le ultime due danno:

$$a_1 = \frac{h}{16} a_0, \qquad b_1 = \frac{h}{16} b_0,$$

dopo di che ricaviamo dalle prime due:

$$\omega_0\varepsilon \pm \frac{h\omega_0^2}{2} + \frac{\varepsilon^2}{4} - \frac{h^2\omega_0^2}{32} = 0.$$

Risolvendo questa equazione a meno dei termini d'ordine h^2, otteniamo i valori limiti di ε cercati:

$$\varepsilon = \pm \frac{h\omega_0}{2} - \frac{1}{32} h^2\omega_0.$$

2. Determinare i limiti dell'intervallo d'instabilità per una risonanza in prossimità di $\gamma = \omega_0$.

Soluzione. Scrivendo $\gamma = \omega_0 + \varepsilon$, otteniamo l'equazione del moto

$$\ddot{x} + \omega_0^2 [1 + h \cos(\omega_0 + \varepsilon) t] x = 0.$$

Tenendo presente che i valori limiti cercati differiscono poco da h^2 ($\varepsilon \sim h^2$), cerchiamo la soluzione nella forma:

$$x = a_0 \cos(\omega_0 + \varepsilon)\, t + b_0 \operatorname{sen}(\omega_0 + \varepsilon)\, t + \\ + a_1 \cos 2(\omega_0 + \varepsilon)\, t + b_1 \operatorname{sen} 2(\omega_0 + \varepsilon)\, t + c_1,$$

dove si tiene conto dei termini del primo e del secondo ordine. Per determinare i limiti dell'intervallo d'instabilità, supponiamo nuovamente costanti i coefficienti ed otteniamo:

$$\left[-2\omega_0\varepsilon a_0 + \frac{h\omega_0^2}{2} a_1 + h\omega_0^2 c_1\right] \cos(\omega_0+\varepsilon)\, t + \\ + \left[-2\omega_0\varepsilon b_0 + \frac{h\omega_0^2}{2} b_1\right] \operatorname{sen}(\omega_0+\varepsilon)\, t + \\ + \left[-3\omega_0^2 a_1 + \frac{h\omega_0^2}{2} a_0\right] \cos 2(\omega_0+\varepsilon)\, t + \\ + \left[-3\omega_0^2 b_1 + \frac{h\omega_0^2}{2} b_0\right] \operatorname{sen} 2(\omega_0+\varepsilon)\, t + \left[c_1\omega_0^2 + \frac{h\omega_0^2}{2} a_0\right] = 0.$$

D'onde abbiamo:

$$a_1 = \frac{h}{6} a_0, \quad b_1 = \frac{h}{6} b_0, \quad c_1 = -\frac{h}{2} a_0,$$

e quindi troviamo i due limiti dell'intervallo d'instabilità:

$$\varepsilon = -\frac{5}{24} h^2\omega_0, \quad \varepsilon = \frac{1}{24} h^2\omega_0.$$

3. Trovare le condizioni di risonanza parametrica per piccole oscillazioni di un pendolo piano il cui punto di sospensione oscilla verticalmente.

Soluzione. La funzione di Lagrange, trovata nel problema 3, *c*) del § 5, dà per piccole oscillazioni ($\varphi \ll 1$) l'equazione del moto

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \left(1 + 4\frac{a}{l} \cos(2\omega_0 + \varepsilon)\, t\right) \varphi = 0$$

(dove $\omega_0^2 = g/l$). È chiaro che il rapporto $4a/l$ funge da parametro h introdotto nel testo. La condizione (27,11), per esempio, assume la forma

$$|\varepsilon| < \frac{2a\sqrt{g}}{l^{3/2}}.$$

§ 28. *Oscillazioni anarmoniche*

Tutta la teoria delle piccole oscillazioni precedentemente esposta è basata su uno sviluppo delle energie cinetica e potenziale secondo le velocità e le coordinate considerando soltanto i termini del secondo ordine; le equazioni del moto risultano allora lineari, ciò che permette in questa approssimazione di parlare di oscillazioni *lineari*. Sebbene questo metodo sia del tutto legittimo quando l'ampiezza delle oscillazioni è sufficientemente piccola, il tener conto delle approssimazioni successive (della cosiddetta *anarmonicità* o *non linea-*

rità delle oscillazioni) porta alla comparsa di proprietà del moto che, pur essendo deboli, sono qualitativamente nuove.

Sviluppiamo la funzione di Lagrange sino ai termini del terzo ordine. Nell'energia potenziale appariranno allora termini di terzo grado in coordinate x_i, mentre nell'energia cinetica appariranno termini contenenti prodotti delle velocità e delle coordinate del tipo $\dot{x}_i\dot{x}_k x_l$; questa differenza dalla precedente espressione (23,3) è dovuta alla conservazione dei termini del primo ordine rispetto ad x nello sviluppo delle funzioni $a_{ik}(q)$. In tal modo, la funzione di Lagrange assumerà la forma

$$L = \frac{1}{2}\sum_{i,k}(m_{ik}\dot{x}_i\dot{x}_k - k_{ik}x_ix_k) + \\ + \frac{1}{2}\sum_{i,k,l} n_{ikl}\dot{x}_i\dot{x}_k x_l - \frac{1}{3}\sum_{i,k,l} l_{ikl}x_ix_kx_l, \qquad (28,1)$$

dove n_{ikl}, l_{ikl} sono nuovi coefficienti costanti.

Se si passa dalle coordinate arbitrarie x_i alle coordinate normali Q_α (dell'approssimazione lineare), in virtú della linearità di questa trasformazione, la terza e la quarta somma nella (28,1) si trasformeranno in somme analoghe dove le coordinate x_i e le velocità $\dot{x}_i$ verranno sostituite con Q_α e $\dot{Q}_\alpha$. Indicando i coefficienti in queste somme con $\lambda_{\alpha\beta\gamma}$ e $\mu_{\alpha\beta\gamma}$, otteniamo la funzione di Lagrange

$$L = \frac{1}{2}\sum(\dot{Q}_\alpha^2 - \omega_\alpha^2 Q_\alpha^2) + \\ + \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta,\gamma}\lambda_{\alpha\beta\gamma}\dot{Q}_\alpha\dot{Q}_\beta Q_\gamma - \frac{1}{3}\sum_{\alpha,\beta,\gamma}\mu_{\alpha\beta\gamma}Q_\alpha Q_\beta Q_\gamma. \qquad (28,2)$$

Non scriveremo tutte le equazioni del moto che derivano da questa funzione lagrangiana. L'essenziale è che esse sono della forma

$$\ddot{Q}_\alpha + \omega_\alpha^2 Q_\alpha = f_\alpha(Q, \dot{Q}, \ddot{Q}), \qquad (28,3)$$

dove f_α sono funzioni omogenee del secondo ordine delle coordinate Q e delle loro derivate rispetto al tempo.

Applicando il metodo delle approssimazioni successive, cerchiamo per queste equazioni una soluzione del tipo

$$Q_\alpha = Q_\alpha^{(1)} + Q_\alpha^{(2)}, \qquad (28,4)$$

dove $Q_\alpha^{(2)} \ll Q_\alpha^{(1)}$ e dove le funzioni $Q_\alpha^{(1)}$ soddisfano le equazioni « imperturbate »

$$\ddot{Q}_\alpha^{(1)} + \omega_\alpha^2 Q_\alpha^{(1)} = 0,$$

cioè rappresentano oscillazioni armoniche ordinarie

$$Q_\alpha^{(1)} = a_\alpha \cos(\omega_\alpha t + \alpha_\alpha). \qquad (28,5)$$

Nell'approssimazione seguente, conservando nel secondo membro delle equazioni (28,3) soltanto termini infinitesimi del secondo ordine, otterremo per le grandezze $Q_\alpha^{(2)}$ le equazioni

$$\ddot{Q}_\alpha^{(2)} + \omega_\alpha^2 Q_\alpha^{(2)} = f_\alpha (Q^{(1)}, \dot{Q}^{(1)}, \ddot{Q}^{(1)}), \tag{28,6}$$

dove, nel secondo membro, si deve sostituire l'espressione (28,5). Come risultato, otterremo equazioni differenziali lineari non omogenee in cui il secondo membro può essere trasformato in somme di funzioni periodiche semplici. Per esempio,

$$Q_\alpha^{(1)} Q_\beta^{(1)} = a_\alpha a_\beta \cos(\omega_\alpha t + \alpha_\alpha) \cos(\omega_\beta t + \alpha_\beta) =$$
$$= \frac{1}{2} a_\alpha a_\beta \{\cos[(\omega_\alpha + \omega_\beta) t + \alpha_\alpha + \alpha_\beta] + \cos[(\omega_\alpha - \omega_\beta) t + \alpha_\alpha - \alpha_\beta]\}.$$

In tal modo, i secondi membri delle equazioni (28,6) contengono termini che corrispondono alle oscillazioni di frequenze uguali alle somme e alle differenze delle oscillazioni proprie del sistema. La soluzione delle equazioni va cercata sotto la forma contenente questi stessi fattori periodici; giungiamo quindi alla conclusione che, nella seconda approssimazione, oscillazioni supplementari di frequenze

$$\omega_\alpha \pm \omega_\beta \tag{28,7}$$

(comprese le frequenze $2\omega_\alpha$ e la frequenza 0 corrispondente ad uno spostamento costante) si sovrappongono con le oscillazioni normali del sistema di frequenze ω_α. Le frequenze di queste oscillazioni supplementari sono dette *combinatorie*. Le ampiezze delle oscillazioni combinatorie sono proporzionali ai prodotti $a_\alpha a_\beta$ (oppure ai quadrati $a_\alpha^{(2)}$) delle corrispondenti oscillazioni normali.

Nelle approssimazioni successive, tenendo conto di termini d'ordine piú elevato nello sviluppo della funzione di Lagrange, appaiono oscillazioni combinatorie le cui frequenze sono somme e differenze di un numero piú grande di frequenze ω_α. Inoltre, si verifica un altro fenomeno nuovo.

Già nell'approssimazione del terzo ordine appaiono, tra le oscillazioni combinatorie, oscillazioni che coincidono con quelle iniziali ω_α (cioè $\omega_\alpha + \omega_\beta - \omega_\beta$). Applicando il metodo descritto sopra al secondo membro delle equazioni del moto, si avranno quindi termini di risonanza che daranno nella soluzione termini con ampiezza crescente col tempo. È fisicamente evidente, però, che in un sistema isolato, in assenza di sorgenti esterne d'energia, non ci possono essere incrementi spontanei dell'intensità delle oscillazioni.

In realtà, nelle approssimazioni superiori, le frequenze fondamentali ω_α subiscono variazioni in confronto ai loro valori « imperturbati » $\omega_\alpha^{(0)}$ che figurano nell'espressione quadratica dell'energia potenziale. La comparsa dei termini crescenti col tempo nella soluzio-

ne è dovuta ad uno sviluppo del tipo

$$\cos(\omega_\alpha^{(0)} + \Delta\omega_\alpha)\, t \approx \cos \omega_\alpha^{(0)} t - t\Delta\omega_\alpha \operatorname{sen} \omega_\alpha^{(0)} t,$$

che evidentemente non è ammissibile per t è abbastanza grandi.

Quindi, quando si passa all'approssimazione seguente, il metodo delle approssimazioni successive dev'essere modificato in maniera tale che i fattori periodici che figurano nella soluzione contengano sin dall'inizio i valori esatti e non approssimati delle frequenze. Nella soluzione delle equazioni le variazioni delle frequenze vengono determinate dalla condizione di assenza dei termini di risonanza.

Illustriamo questo metodo nel caso delle oscillazioni anarmoniche con un solo grado di libertà; scriviamo la funzione di Lagrange nella forma

$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{m\omega_0^2}{2} x^2 - \frac{m\alpha}{3} x^3 - \frac{m\beta}{4} x^4. \tag{28,8}$$

La corrispondente equazione del moto è

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = -\alpha x^2 - \beta x^3. \tag{28,9}$$

Cerchiamo la soluzione sotto forma di una serie di approssimazioni successive

$$x = x^{(1)} + x^{(2)} + x^{(3)},$$

dove

$$x^{(1)} = a \cos \omega t \tag{28,10}$$

con un valore esatto per ω che cerchiamo in seguito sotto forma di una serie $\omega = \omega_0 + \omega^{(1)} + \omega^{(2)} + \ldots$ (si può sempre annullare la fase iniziale nella $x^{(1)}$ con una scelta appropriata dell'origine dei tempi). Nonostante questo, la forma (28,9) dell'equazione del moto non è comoda: dopo la sostituzione della (28,10) il primo membro dell'uguaglianza non diventa rigorosamente nullo. Pertanto scriviamo preliminarmente l'equazione nella forma equivalente

$$\frac{\omega_0^2}{\omega^2} \ddot{x} + \omega_0^2 x = -\alpha x^2 - \beta x^3 - \left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right) \ddot{x}. \tag{28,11}$$

Ponendo qui $x = x^{(1)} + x^{(2)}$, $\omega = \omega_0 + \omega^{(1)}$ ed omettendo gli infinitesimi superiori al secondo ordine, otteniamo per $x^{(2)}$ l'equazione

$$\ddot{x}^{(2)} + \omega_0^2 x^{(2)} = -\alpha a^2 \cos^2 \omega t + 2\omega_0 \omega^{(1)} a \cos \omega t =$$
$$= -\frac{\alpha a^2}{2} - \frac{\alpha a^2}{2} \cos 2\omega t + 2\omega_0 \omega^{(1)} a \cos \omega t.$$

La condizione di assenza del termine di risonanza nel secondo membro dell'uguaglianza dà semplicemente $\omega^{(1)} = 0$, in accordo con

il metodo di ricerca della seconda approssimazione esposto all'inizio di questo paragrafo. Risolvendo poi col metodo ordinario questa equazione lineare non omogenea, otteniamo:

$$x^{(2)} = -\frac{\alpha a^2}{2\omega_0^2} + \frac{\alpha a^2}{6\omega_0^2}\cos 2\omega t. \tag{28,12}$$

In seguito, ponendo nella (28,11) $x = x^{(1)} + x^{(2)} + x^{(3)}$, $\omega = \omega_0 + \omega^{(2)}$, otteniamo per $x^{(3)}$ l'equazione

$$\ddot{x}^{(3)} + \omega_0^2 x^{(3)} = -2\alpha x^{(1)} x^{(2)} - \beta x^{(1)3} + 2\omega_0 \omega^{(2)} x^{(1)}$$

oppure, riportando nel secondo membro le espressioni (28,10) e (28,12) dopo una semplice trasformazione:

$$\ddot{x}^{(3)} + \omega_0^2 x^{(3)} = -a^3\left[\frac{\beta}{4} + \frac{\alpha^2}{6\omega_0^2}\right]\cos 3\omega t + \\ + a\left[2\omega_0\omega^{(2)} + \frac{5a^2\alpha^2}{6\omega_0^2} - \frac{3}{4}a^2\beta\right]\cos \omega t.$$

Ponendo uguale a zero il coefficiente del fattore di risonanza $\cos \omega t$, troviamo la correzione alla frequenza fondamentale, proporzionale al quadrato dell'ampiezza dell'oscillazione:

$$\omega^{(2)} = \left(\frac{3\beta}{8\omega_0} - \frac{5\alpha^2}{12\omega_0^3}\right)a^2. \tag{28,13}$$

L'oscillazione combinatoria del terzo ordine è

$$x^{(3)} = \frac{a^2}{16\omega_0^2}\left(\frac{a^2}{3\omega_0^2} + \frac{\beta}{2}\right)\cos 3\omega t. \tag{28,14}$$

§ 29. *Risonanza nelle oscillazioni non lineari*

Se si tiene conto dei termini anarmonici nelle oscillazioni forzate di un sistema, nei fenomeni di risonanza compaiono proprietà qualitativamente nuove.

Aggiungendo al secondo membro dell'equazione (28,9) una forza esterna periodica (di frequenza γ), si ottiene:

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{f}{m}\cos \gamma t - \alpha x^2 - \beta x^3; \tag{29,1}$$

dove abbiamo scritto anche la forza d'attrito con coefficiente di smorzamento λ (che in seguito supporremo piccolo). Volendo essere rigorosi fino in fondo, se si tiene conto dei termini non lineari nell'equazione delle oscillazioni libere, si dovrebbero prendere in considerazione anche i termini d'ordine superiore nell'ampiezza della forza esterna, termini che corrispondono ad una eventuale dipendenza di quest'ultima dallo spostamento x. Noi non scriveremo questi

termini per rendere più semplici le formule; infatti, essi non modificano l'aspetto qualitativo dei fenomeni.

Sia

$$\gamma = \omega_0 + \varepsilon$$

(con ε piccolo), siamo cioè in prossimità di una risonanza ordinaria. Per chiarire il carattere del moto, si può anche fare a meno di uno studio diretto dell'equazione (29,1), se si tiene conto delle considerazioni seguenti.

Nell'approssimazione lineare, la relazione tra l'ampiezza b dell'oscillazione forzata da una parte, l'ampiezza f e la frequenza γ della forza esterna dall'altra, è data in prossimità della risonanza dalla formula (26,7), che scriviamo come segue:

$$b^2(\varepsilon^2 + \lambda^2) = \frac{f^2}{4m^2\omega_0^2}. \tag{29,2}$$

Il carattere non lineare delle oscillazioni implica una relazione tra la loro frequenza propria e l'ampiezza; scriviamo questa dipendenza nella forma

$$\omega_0 + \varkappa b^2, \tag{29,3}$$

dove la costante $\varkappa$ è espressa in un modo ben determinato mediante i coefficienti di anarmonicità [cfr. (28,13)]. Conformemente a ciò, sostituiamo nella (29,2) (o meglio, nella piccola differenza $\gamma - \omega_0$) ω_0 con $\omega_0 + \varkappa b^2$.

Conservando la notazione $\varepsilon = \gamma - \omega_0$, otteniamo in definitiva l'equazione

$$b^2[(\varepsilon - \varkappa b^2)^2 + \lambda^2] = \frac{f^2}{4m^2\omega_0^2} \tag{29,4}$$

ossia

$$\varepsilon = \varkappa b^2 \pm \sqrt{\left(\frac{f}{2m\omega_0 b}\right)^2 - \lambda^2}.$$

L'equazione (29,4) è cubica rispetto a b^2, e le sue radici reali determinano l'ampiezza delle oscillazioni forzate. Consideriamo la dipendenza di questa ampiezza dalla frequenza della forza esterna per una data ampiezza f della forza.

Per valori di f sufficientemente piccoli anche l'ampiezza b è piccola, quindi si possono trascurare nella (29,4) i gradi di b superiori al secondo, e la formula ottenuta coincide con la già nota funzione $b(\varepsilon)$ (29,2), che rappresenta una curva simmetrica con un massimo nel punto $\varepsilon = 0$ (fig. 32, *a*). Con il crescere di f la curva subisce una deformazione, conservando ancora in un primo tempo il suo carattere, mantenendo cioè un solo massimo (fig. 32,*b*); il picco si sposta (per $\varkappa > 0$) nel senso delle ε positive. Delle tre radici dell'equazione (29,4) una sola è reale.

Tuttavia, a partire da un determinato valore $f = f_k$ (che verrà definito dopo), il carattere della curva cambia. Per ciascun valore di $f > f_k$ esiste una determinata regione di frequenze nella quale l'equazione (29,4) ha tre radici reali; a questa regione corrisponde la porzione $BCDE$ della curva nella fig. 32,*c*.

I limiti di questa regione sono definiti dalla condizione $\frac{db}{d\varepsilon} = \infty$ nei punti D e C. Differenziando l'equazione (29,4) rispetto ad ε, abbiamo:

$$\frac{db}{d\varepsilon} = \frac{-\varepsilon b + \varkappa b^3}{\varepsilon^2 + \lambda^2 - 4\varkappa\varepsilon b^2 + 3\varkappa^2 b^4}.$$

La posizione dei punti D e C si determina dunque, risolvendo contemporaneamente l'equazione

$$\varepsilon^2 - 4\varkappa b^2\varepsilon + 3\varkappa^2 b^4 + \lambda^2 = 0 \qquad (29,5)$$

e l'equazione (29,4); i valori corrispondenti di ε sono ambedue positivi. Il valore massimo dell'ampiezza si ottiene nel punto dove $\frac{db}{d\varepsilon} = 0$. Si ha allora $\varepsilon = \varkappa b^2$, e la (29,4) ci dà

$$b_{\max} = \frac{f}{2m\omega_0\lambda}; \qquad (29,6)$$

questo valore coincide con il massimo dato dalla relazione (29,2).

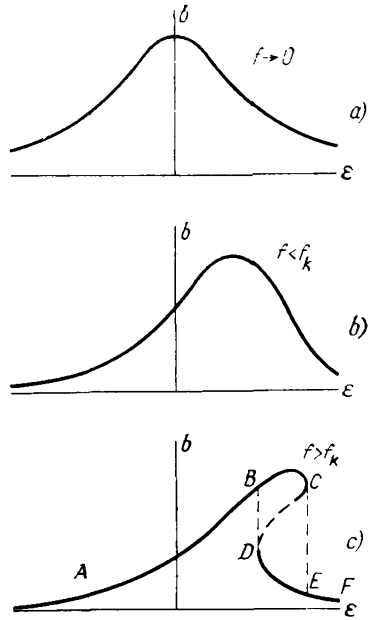


Fig. 32

Si può dimostrare (non tratteremo qui questo argomento [1])) che delle tre radici reali dell'equazione (29,4) quella intermedia (la porzione CD della curva, tratteggiata nella fig. 32, *c*) corrisponde ad oscillazioni instabili del sistema: ogni forza, per debole che sia, agendo su un sistema che si trova in questo stato, causerebbe il passaggio a un regime oscillatorio corrispondente alla radice massima o minima (cioè alle porzioni BC o DE). Di conseguenza, soltanto i rami ABC e DEF corrispondono a reali oscillazioni del sistema. La presenza di una regione di frequenze che ammette due ampiezze differenti delle oscillazioni rappresenta una rimarchevole proprietà. Al progressivo aumentare della frequenza della forza esterna aumenta l'ampiezza delle oscillazioni forzate secondo la curva ABC. Nel punto C si ha una « rottura » dell'ampiezza, che cade

[1]) Si può trovare la dimostrazione, per esempio, nell'opera di N. Bogoliubov e J. Mitropolskij, *Asimptoticeskie metody v teorii nelinejnych kolebanij* (Metodi asintotici nella teoria delle oscillazioni non lineari), Fizmatghiz, Mosca, 1958.

bruscamente sino al valore corrispondente al punto E, per poi variare lungo la curva EF (all'ulteriore aumentare della frequenza). Se ora diminuiamo di nuovo la frequenza, l'ampiezza delle oscillazioni forzate varia lungo la curva FD, salta dal punto D al punto B per poi decrescere lungo BA.

Per valutare il valore f_k, notiamo che esso rappresenta quel valore di f per il quale ambedue le radici della equazione quadratica rispetto a b^2 (29,5) coincidono; per $f = f_k$ tutta la parte CD si riduce ad un punto di flesso. Uguagliando a zero il discriminante dell'equazione di secondo grado (29,5), si ottiene $\varepsilon^2 = 3\lambda^2$; la radice corrispondente dell'equazione è $\varkappa b^2 = 2\varepsilon/3$. Sostituendo questi valori di b ed ε nella (29,4), otteniamo:

$$f_k^2 = \frac{32 m^2 \omega_0^2 \lambda^3}{3\sqrt{3}\,|\varkappa|}. \tag{29,7}$$

Accanto ad un cambiamento del carattere dei fenomeni di risonanza per frequenze $\gamma \approx \omega_0$, la non linearità delle oscillazioni genera anche la comparsa di nuove risonanze nelle quali le oscillazioni di frequenza vicina a ω_0 sono eccitate da una forza esterna di frequenza abbastanza differente da ω_0.

Sia $\gamma \approx \omega_0/2$ la frequenza della forza esterna, cioè

$$\gamma = \frac{\omega_0}{2} + \varepsilon.$$

Nella prima approssimazione, lineare, essa eccita nel sistema oscillazioni della stessa frequenza e di ampiezza proporzionale all'ampiezza della forza:

$$x^{(1)} = \frac{4f}{3m\omega_0^2} \cos\left(\frac{\omega_0}{2} + \varepsilon\right) t$$

[conformemente alla formula (22,4)]. Tenendo conto dei termini non lineari, nella seconda approssimazione, queste oscillazioni faranno apparire nel secondo membro dell'equazione del moto (29,1) un termine di frequenza $2\gamma \approx \omega_0$. Precisamente, ponendo $x^{(1)}$ nell'equazione

$$\ddot{x}^{(2)} + 2\lambda\dot{x}^{(2)} + \omega_0^2 x^{(2)} + \alpha x^{(2)2} + \beta x^{(2)3} = -\alpha x^{(1)2},$$

introducendo il coseno dell'angolo doppio e conservando nel secondo membro soltanto il termine di risonanza, otteniamo:

$$\ddot{x}^{(2)} + 2\lambda\dot{x}^{(2)} + \omega_0^2 x^{(2)} + \alpha x^{(2)2} + \beta x^{(2)3} = -\frac{8\alpha f^2}{9m^2\omega_0^4} \cos(\omega_0 + 2\varepsilon)\, t. \tag{29,8}$$

Questa equazione differisce dalla (29,1) soltanto per il fatto che al posto dell'ampiezza della forza f, essa contiene un'espressione proporzionale ad f^2. Ciò significa che ha luogo una risonanza dello stesso carattere di quella esaminata precedentemente per le frequenze $\gamma \approx \omega_0$,

ma di intensità inferiore. La funzione b (ε) si ottiene sostituendo f con $-8\alpha f^2/9m\omega_0^4$ (ed ε con 2ε) nell'equazione (29,4):

$$b^2\left[(2\varepsilon-\varkappa b^2)^2+\lambda^2\right]=\frac{16\alpha^2 f^4}{81 m^4\omega_0^{10}}. \qquad (29,9)$$

Sia ora

$$\gamma = 2\omega_0 + \varepsilon$$

la frequenza della forza esterna. Nella prima approssimazione abbiamo:

$$x^{(1)} = -\frac{f}{3m\omega_0^2}\cos(2\omega_0+\varepsilon)\,t.$$

Sostituendo $x = x^{(1)} + x^{(2)}$ nell'equazione (29,1), non otterremo termini aventi il carattere di una forza esterna di risonanza, com'è avvenuto nel caso precedente. Nasce, però, una risonanza di tipo parametrico dal termine del terzo ordine proporzionale al prodotto $x^{(1)}x^{(2)}$. Se di tutti i termini non lineari conserviamo soltanto questo, avremo per $x^{(2)}$ l'equazione

$$\ddot{x}^{(2)} + 2\lambda\dot{x}^{(2)} + \omega_0^2 x^{(2)} = -2\alpha x^{(1)}x^{(2)}$$

ovvero

$$\ddot{x}^{(2)} + 2\lambda\dot{x}^{(2)} + \omega_0^2\left[1-\frac{2\alpha f}{3m\omega_0^4}\cos(2\omega_0+\varepsilon)\,t\right]x^{(2)} = 0, \qquad (29,10)$$

cioè un'equazione del tipo (27,8) (tenendo conto dell'attrito) che porta, come abbiamo già visto, ad oscillazioni instabili in un determinato intervallo di frequenze.

Questa equazione non è però sufficiente per determinare l'ampiezza risultante delle oscillazioni che dipende dagli effetti della non linearità; per tenerne conto è necessario conservare nell'equazione del moto anche i termini non lineari rispetto ad $x^{(2)}$:

$$\ddot{x}^{(2)} + 2\lambda\dot{x}^{(2)} + \omega_0^2 x^{(2)} + \alpha x^{(2)2} + \beta x^{(2)3} = \\ = \frac{2\alpha f}{3m\omega_0^2}\cos(2\omega_0+\varepsilon)\,t\cdot x^{(2)}. \qquad (29,11)$$

Lo studio di questo problema si semplifica se si considera la seguente circostanza. Ponendo nel secondo membro dell'equazione (29,11)

$$x^{(2)} = b\cos\left[\left(\omega_0+\frac{\varepsilon}{2}\right)t+\delta\right]$$

(dove b è l'ampiezza delle oscillazioni di risonanza cercata e δ uno sfasamento costante con conseguenze poco importanti) e scrivendo il prodotto dei due fattori periodici sotto forma di una somma di

due coseni, otterremo il termine di risonanza ordinaria

$$\frac{\alpha f b}{3m\omega_0^2}\cos\left[\left(\omega_0+\frac{\varepsilon}{2}\right)t-\delta\right]$$

(rispetto alla frequenza propria ω_0 del sistema.). Di conseguenza, il problema si riduce nuovamente a quello della risonánza ordinaria in un sistema non lineare, che abbiamo esaminato all'inizio del presente paragrafo, con la sola differenza che ora il valore dell'ampiezza

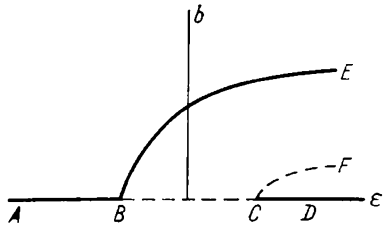


Fig. 33

della forza esterna è dato dalla grandezza $\alpha f b/3\omega_0^2$ (ed al posto di ε si ha $\varepsilon/2$). Facendo questa sostituzione nell'equazione (29,4), si ottiene:

$$b^2\left[\left(\frac{\varepsilon}{2}-\varkappa b^2\right)^2+\lambda^2\right]=\frac{\alpha^2 f^2 b^2}{36m^2\omega_0^6}.$$

Risolvendo questa equazione rispetto a b, troviamo i seguenti valori possibili per l'ampiezza:

$$b=0, \tag{29,12}$$

$$b^2=\frac{1}{\varkappa}\left[\frac{\varepsilon}{2}+\sqrt{\left(\frac{\alpha f}{6m\omega_0^3}\right)^2-\lambda^2}\right], \tag{29.13}$$

$$b^2=\frac{1}{\varkappa}\left[\frac{\varepsilon}{2}-\sqrt{\left(\frac{\alpha f}{6m\omega^3}\right)^2-\lambda^2}\right]. \tag{29,14}$$

La relazione cosí ottenuta tra b ed ε è rappresentata nella fig. 33 (per $\varkappa>0$; se $\varkappa<0$, le curve sono dirette in senso opposto). I punti B e C corrispondono ai valori

$$\varepsilon=\pm\sqrt{\left(\frac{\alpha f}{3m\omega_0^3}\right)^2-4\lambda^2}.$$

A sinistra del punto B è possibile soltanto il valore $b=0$, cioè la risonanza manca e le oscillazioni di frequenza prossima a ω_0 non vengono eccitate. Nell'intervallo tra B e C abbiamo due radici: $b=0$ (segmento BC nella fig. 33) e l'espressione (29,13) (ramo BE). Infine, a destra del punto C esistono tutte e tre le radici: (29,12), (29,13), (29,14). Tuttavia non tutti questi valori corrispondono ad un regime

oscillatorio stabile. Il valore $b = 0$ è instabile nella parte BC[1]), e si può dimostrare anche che il regime corrispondente alla radice (29,14) (intermedia tra le altre due) è sempre instabile. Nella fig. 33 i valori instabili di b sono tratteggiati.

Vediamo, per esempio, come si comporta un sistema, dapprima « perseverante in quiete » [2]), quando gradualmente diminuisce la frequenza della forza esterna. Fino al punto C, resta sempre $b = 0$; dopo si produce una « rottura » di questo stato e si passa sul ramo EB. In seguito, ad un'ulteriore diminuzione di ε, l'ampiezza delle oscillazioni decresce sino a zero nel punto B. Aumentando di nuovo la frequenza, l'ampiezza delle oscillazioni cresce lungo la curva BE[3]).

I casi di risonanza considerati sono i casi principali che si verificano in un sistema oscillante non lineare. A piú alte approssimazioni compaiono risonanze anche ad altre frequenze. A rigore, si deve avere risonanza per ogni frequenza γ per cui $n\gamma + m\omega_0 = \omega_0$ (n, m interi), cioè per ogni $\gamma = p\omega_0/q$, dove p e q sono pure numeri interi. Ciò nonostante, a misura che il grado di approssimazione si eleva l'intensità dei fenomeni di risonanza (come pure l'ampiezza degli intervalli di frequenze in cui devono aver luogo) diminuisce con una rapidità tale che, in realtà, si possono osservare soltanto le risonanze per le frequenze $\gamma \approx p\omega_0/q$ con p e q piccoli.

PROBLEMA

Determinare la funzione $b(\varepsilon)$ per una risonanza a frequenze $\gamma \approx 3\omega_0$.

Soluzione. Nella prima approssimazione,

$$x^{(1)} = -\frac{f}{8m\omega_0^2}\cos(3\omega_0 + \varepsilon)\,t.$$

Per la seconda approssimazione, $x^{(2)}$, ricaviamo dalla (29,1) l'equazione

$$\ddot{x}^{(2)} + 2\lambda\dot{x}^{(2)} + \omega_0^2 x^{(2)} + \alpha x^{(2)2} + \beta x^{(2)3} = -3\beta x^{(1)}x^{(2)2},$$

---

[1]) Questo intervallo corrisponde esattamente alla regione di risonanza parametrica (27,12); dal confronto della (29,10) con la (27,8) abbiamo $|h| = 2\alpha f/3m\omega_0^4$) La condizione

$$\left|\frac{2\alpha f}{3m\omega_0^3}\right| > 4\lambda,$$

per la quale l'esistenza del fenomeno considerato è possibile, corrisponde alla disuguaglianza $h > h_k$.

[2]) Ricordiamo che consideriamo qui soltanto le oscillazioni di risonanza. La loro assenza non significa letteralmente che il sistema sia in quiete; vi si possono generare deboli oscillazioni forzate di frequenza γ.

[3]) È necessario, però, tener presente che tutte queste formule sono valide finché l'ampiezza b (come anche ε) resta sufficientemente piccola. In realtà, le curve BE e CF non sono affatto infinite, ma in un certo punto si congiungono; appena questo punto è raggiunto, il regime oscillante si « rompe » e si ha $b = 0$.

dove il secondo membro contiene soltanto il termine che dà la risonanza considerata. Ponendo $x^{(2)} = b \cos\left[\left(\omega_0 + \frac{\varepsilon}{3}\right) t + \delta\right]$ e separando il termine di risonanza dal prodotto dei tre coseni, otteniamo nel secondo membro dell'equazione l'espressione

$$\frac{3\beta b^2 f}{32 m \omega_0^2} \cos\left[\left(\omega_0 + \frac{\varepsilon}{3}\right) t - 2\delta\right].$$

Di qui risulta chiaro che la dipendenza di b da ε si ottiene sostituendo nella (29,4) f con $3\beta b^2 f/32\omega_0^2$ ed ε con $\varepsilon/3$:

$$b^2\left[\left(\frac{\varepsilon}{3} - \varkappa b^2\right)^2 + \lambda^2\right] = \frac{9\beta^2 f^2}{2^{12} m^2 \omega_0^6} b^4 \equiv A b^4.$$

Questa equazione ha per radici:

$$b = 0,$$

$$b^2 = \frac{\varepsilon}{3\varkappa} + \frac{A}{2\varkappa^2} \pm \frac{1}{\varkappa}\sqrt{\frac{\varepsilon A}{3\varkappa} + \frac{A^2}{4\varkappa^2} - \lambda^2}.$$

Nella fig. 34 è rappresentato graficamente il carattere della dipendenza

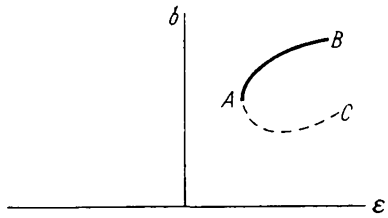


Fig. 34

di b da ε (per $\varkappa > 0$). Soltanto il valore $b = 0$ (asse delle ascisse) e il ramo AB corrispondono a regimi stabili. Al punto A corrispondono i valori

$$\varepsilon_k = \frac{3(4\varkappa^2\lambda^2 - A^2)}{4\varkappa A}, \qquad b_k^2 = \frac{4\varkappa^2\lambda^2 + A^2}{4\varkappa^2 A}.$$

Il regime oscillatorio esiste soltanto per $\varepsilon > \varepsilon_k$, con un'ampiezza $b > b_k$. Poiché lo stato $b = 0$ è sempre stabile, ci vuole una « spinta » iniziale per eccitare oscillazioni.

Le formule ottenute sono valide soltanto per ε piccoli. Questa condizione si ha automaticamente se anche λ è piccolo e se l'ampiezza della forza soddisfa la condizione $\lambda^2/\omega_0 \ll A/\varkappa \ll \omega_0$.

§ 30. *Moto in un campo rapidamente oscillante*

Consideriamo il moto di una particella sollecitata contemporaneamente da un campo costante U e da una forza

$$f = f_1 \cos \omega t + f_2 \operatorname{sen} \omega t, \tag{30,1}$$

che varia col tempo ad una grande frequenza ω (f_1 ed f_2 sono funzioni delle sole coordinate). Con « grande » noi intendiamo una frequenza che soddisfa la condizione $\omega \gg 1/T$, dove T è l'ordine di grandezza del periodo del moto che la particella effettuerebbe nel solo campo U. La grandezza della forza f non si suppone piccola in confronto alle forze agenti nel campo U. Supporremo però che lo spostamento oscillatorio (indichiamolo con ξ) della particella provocato da questa forza sia piccolo.

Per semplificare i calcoli, consideriamo dapprima un moto unidimensionale in un campo dipendente da una sola coordinata spaziale x. L'equazione del moto della particella è allora[1])

$$m\ddot{x} = -\frac{dU}{dx} + f. \tag{30,2}$$

Dal carattere del campo agente sulla particella è chiaro che il moto di essa rappresenterà uno spostamento lungo una traiettoria « imperturbata », accompagnato da piccole oscillazioni (di frequenza ω) intorno a questa traiettoria. Scriviamo quindi la funzione $x(t)$ sotto forma di una somma

$$x(t) = X(t) + \xi(t), \tag{30,3}$$

dove $\xi(t)$ rappresenta le piccole oscillazioni suindicate.

Il valore medio della funzione $\xi(t)$ si annulla in un periodo $2\pi/\omega$, mentre la funzione $X(t)$, in questo stesso periodo, varia poco. Indicando il valore medio con un trattino sopra la lettera, abbiamo dunque $\bar{x} = X(t)$, vale a dire che la funzione $X(t)$ descrive il moto « continuo » della particella mediato rispetto alle rapide oscillazioni. Deduciamo l'equazione che determina questa funzione[2]).

Sostituendo la (30,3) nella (30,2) e sviluppando secondo le potenze di ξ con una approssimazione sino ai termini del primo ordine, otteniamo:

$$m\ddot{X} = m\ddot{\xi} = -\frac{dU}{dX} - \xi\frac{d^2U}{dX^2} + f(X, t) + \xi\frac{\partial f}{\partial X}. \tag{30,4}$$

In questa equazione compaiono termini di carattere diverso: gli oscillanti e i « continui »; i due gruppi evidentemente devono essere compensati separatamente. Per i termini oscillanti è sufficiente scrivere

$$m\ddot{\xi} = f(X, t), \tag{30,5}$$

---

[1]) La coordinata x non è necessariamente una coordinata cartesiana, e il coefficiente m, corrispondentemente, non è necessariamente la massa della particella, né è necessariamente costante come è stato supposto nella (30,2). Questa ipotesi, però, non influisce sul risultato finale (vedi piú avanti).

[2]) L'idea del metodo esposto sotto appartiene a *P. L. Kapiza* (1951).

gli altri contengono il fattore piccolo ξ e, di conseguenza, sono piccoli in confronto a quanto abbiamo scritto (quanto alla derivata $\dot{\xi}$, essa è proporzionale a ω^2 che è grande, e non può dunque essere considerata piccola). Integrando l'equazione (30,5) e la funzione f ricavata dalla (30,1) (considerando la grandezza X come costante), otteniamo:

$$\xi = -\frac{f}{m\omega^2}. \tag{30,6}$$

Calcoliamo ora la media dell'equazione (30,4) rispetto al tempo (nel senso suindicato). Poiché i valori medi delle prime potenze di f ed ξ si annullano, otteniamo l'equazione:

$$m\ddot{X} = -\frac{dU}{dX} + \overline{\xi\frac{\partial f}{\partial X}} = -\frac{dU}{dX} - \frac{1}{m\omega^2}\overline{f\frac{\partial f}{\partial X}},$$

che contiene ormai soltanto la funzione $X(t)$. Riscriviamola nella forma

$$m\ddot{X} = -\frac{dU_{\text{eff}}}{dX}, \tag{30,7}$$

dove l'« energia potenziale efficace » è definita da[1])

$$U_{\text{eff}} = U + \frac{1}{2m\omega^2}\overline{f^2} = U + \frac{1}{4m\omega^2}(f_1^2 + f_2^2). \tag{30,8}$$

Confrontando questa espressione con la (30,6), è facile vedere che il termine supplementare (rispetto al campo U) non rappresenta altro che l'energia cinetica media del moto oscillante:

$$U_{\text{eff}} = U + \frac{m}{2}\overline{\dot{\xi}^2}. \tag{30,9}$$

In tal modo, il moto della particella, mediato rispetto alle oscillazioni, avviene come se, oltre al campo costante U, agisse anche un altro campo costante, dipendente quadraticamente dall'ampiezza di un campo variabile.

È facile generalizzare il risultato ottenuto al caso di un sistema, avente un numero qualunque di gradi di libertà, che può essere descritto mediante coordinate generalizzate q_i. Per l'energia potenziale efficace si ottiene [in luogo della (30,8)] l'espressione

$$U_{\text{eff}} = U + \frac{1}{2\omega^2}\sum_{i,k} a_{ik}^{-1}\overline{f_i f_k} = U + \sum_{i,k}\frac{a_{ik}}{2}\overline{\dot{\xi}_i\dot{\xi}_k}, \tag{30,10}$$

dove le grandezze a_{ik}^{-1} (in generale funzioni delle coordinate) sono gli elementi della matrice inversa della matrice dei coefficienti a_{ik} dell'energia cinetica del sistema [vedi la (5,5)].

---

[1]) Se m dipende da x, è facile convincersi con un calcolo un po' lungo, che le formule (30,7) e (30,8) restano valide anche in questo caso.

PROBLEMI

1. Determinare la posizione d'equilibrio stabile di un pendolo il cui punto di sospensione effettua oscillazioni verticali di frequenza γ elevata ($\gamma \gg g/l$).

Soluzione. La funzione di Lagrange ottenuta nel problema 3, *c*) del § 5 dà in questo caso per la forza variabile

$$f = -mla\gamma^2 \cos \gamma t \operatorname{sen} \varphi$$

(la grandezza x è rappresentata qui dall'angolo φ). Quindi l'« energia potenziale efficace » è

$$U_{\text{eff}} = mgl \left(-\cos \varphi + \frac{a^2\gamma^2}{4gl} \operatorname{sen}^2 \varphi \right).$$

Le posizioni d'equilibrio stabile corrispondono al minimo di questa funzione. La direzione verticale verso il basso ($\varphi = 0$) è sempre stabile. Se la condizione

$$a^2\gamma^2 > 2gl$$

è soddisfatta, è stabile anche la posizione verticale verso l'alto ($\varphi = \pi$).

2. Risolvere il problema precedente per un pendolo il cui punto di sospensione oscilla orizzontalmente.

Soluzione. Secondo la funzione di Lagrange ottenuta nel problema 3,*b*) del § 5, troviamo $f = mla\gamma^2 \cos \gamma t \cos \varphi$ e quindi

$$U_{\text{eff}} = mgl \left[-\cos \varphi + \frac{a^2\gamma^2}{4gl} \cos^2 \varphi \right].$$

Se $a^2\gamma^2 < 2gl$, la posizione $\varphi = 0$ è stabile. Se invece $a^2\gamma^2 > 2gl$, il valore corrispondente a un equilibrio stabile è

$$\cos \varphi = \frac{2gl}{a^2\gamma^2}.$$

Capitolo VI

MOTO DEI CORPI SOLIDI

§ 31. *Velocità angolare*

Il *corpo solido* si può definire nella meccanica come un sistema di punti materiali la cui mutua distanza è invariabile. I sistemi realmente esistenti in natura possono ovviamente soddisfare questa condizione solo in modo approssimato. Ma la maggior parte dei corpi solidi in condizioni usuali cambia cosí poco di forma e dimensioni, che per studiare le leggi del moto di un solido, considerato come un tutt'uno, possiamo astrarre completamente da queste variazioni.

Nell'esposizione seguente considereremo spesso un solido come un insieme discreto di punti materiali, ciò che ci permetterà di ottenere qualche semplificazione delle deduzioni. Tuttavia, questo non è in alcun modo in contrasto con il fatto che i solidi si possono infatti considerare nella meccanica come continui, a prescindere completamente dalla loro struttura interna. Il passaggio dalle formule contenenti la somma su punti discreti alle formule per un corpo continuo si fa semplicemente sostituendo alle masse delle particelle la massa $\rho\, dV$ (ρ è la densità della massa), contenuta nell'elemento di volume dV, e integrando poi su tutto il volume del corpo.

Per descrivere il moto di un solido, introduciamo due sistemi di coordinate: un sistema « immobile », ossia inerziale, XYZ, e un sistema mobile $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$, supposto vincolato rigidamente al solido e partecipe di tutti i movimenti di quest'ultimo. Per comodità, è conveniente far coincidere l'origine del sistema mobile con il baricentro del corpo.

La posizione del corpo solido rispetto al sistema immobile delle coordinate è completamente determinata se è data la posizione del sistema mobile. Sia $\mathbf{R}$ il raggio vettore che indica la posizione dell'origine O del sistema mobile (fig. 35); l'orientazione degli assi di quest'ultimo rispetto al sistema immobile è determinata da tre angoli indipendenti, cosicché, insieme con le tre componenti di $\mathbf{R}$, abbiamo in totale sei coordinate. Ogni corpo solido rappresenta quindi un sistema meccanico con sei gradi di libertà.

Consideriamo uno spostamento infinitesimale arbitrario del corpo solido. Si può rappresentarlo come somma di due parti. Una di queste parti è una traslazione parallela infinitesimale del corpo, per cui il centro di massa passa dalla posizione iniziale a quella finale

senza che cambi l'orientazione degli assi coordinati del sistema mobile; l'altra parte è una rotazione infinitesima intorno al centro di massa, per cui il solido raggiunge la posizione finale.

Indichiamo con **r** il raggio vettore di un punto P qualunque del corpo nel sistema mobile di coordinate, e con τ il raggio vettore

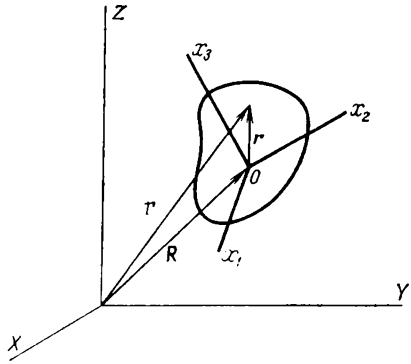


Fig. 35

dello stesso punto nel sistema immobile. Uno spostamento infinitesimale $d\tau$ del punto P è allora formato da uno spostamento $d\mathbf{R}$ insieme con il centro di massa e da uno spostamento $[d\varphi \cdot \mathbf{r}]$ rispetto a quest'ultimo per rotazione di un angolo infinitesimale $d\varphi$ [vedi (9,1)]:

$$d\tau = d\mathbf{R} = [d\varphi \cdot \mathbf{r}].$$

Dividendo questa uguaglianza per il tempo dt, impiegato per effettuare lo spostamento considerato, ed introducendo le velocità

$$\frac{d\tau}{dt} = \mathbf{v}, \qquad \frac{d\mathbf{R}}{dt} = \mathbf{V}, \qquad \frac{d\varphi}{dt} = \mathbf{\Omega}, \tag{31,1}$$

otteniamo la relazione che lega quest'ultime

$$\mathbf{v} = \mathbf{V} + [\mathbf{\Omega}\mathbf{r}]. \tag{31,2}$$

Il vettore **V** è la velocità del centro di massa del corpo solido; è chiamata anche velocità del suo *moto traslatorio*. Il vettore $\mathbf{\Omega}$ è chiamato *velocità angolare* di rotazione del corpo solido; la sua direzione (come la direzione $d\varphi$) coincide con quella dell'asse di rotazione. La velocità **v** di un punto qualunque del corpo (rispetto al sistema immobile) può essere espressa quindi mediante la velocità di traslazione del corpo e la velocità angolare di rotazione.

Occorre sottolineare che nel dedurre la formula (31,2) non si è fatto alcun ricorso alle poprietà specifiche dell'origine delle coordinate come centro di massa del corpo. I vantaggi di questa scelta saranno evidenti solo piú avanti nella valutazione dell'energia del corpo solido in moto.

Supponiamo ora che il sistema di coordinate vincolato rigidamente al solido sia scelto in maniera tale che la sua origine si trovi non piú al centro di massa O, ma in un punto O' distante $\mathbf{a}$ dal punto O. Indichiamo con $\mathbf{V}'$ la velocità di spostamento dell'origine O' di questo sistema e con $\mathbf{\Omega}'$ la sua velocità angolare di rotazione.

Consideriamo di nuovo un punto qualunque P del corpo solido e indichiamo con $\mathbf{r}'$ il suo raggio vettore rispetto all'origine O'. Si ha allora $\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{a}$, e la sostituzione nella (31,2) ci dà:

$$\mathbf{v} = \mathbf{V} + [\mathbf{\Omega a}] + [\mathbf{\Omega r}'].$$

D'altra parte, in virtú della definizione di $\mathbf{V}'$ e $\mathbf{\Omega}'$, si deve avere $\mathbf{v} = \mathbf{V}' + [\mathbf{\Omega}'\mathbf{r}']$. Concludiamo quindi che

$$\mathbf{V}' = \mathbf{V} + [\mathbf{\Omega a}], \quad \mathbf{\Omega}' = \mathbf{\Omega}. \tag{31,3}$$

La seconda di queste uguaglianze è assai importante. Da essa risulta che la velocità angolare con cui il sistema di coordinate solidale con il corpo ruota in un dato istante è assolutamente indipendente da questo sistema. Tutti i sistemi solidali con il corpo solido ruotano in un dato istante intorno ad assi mutuamente paralleli con la stessa velocità $\mathbf{\Omega}$ in valore assoluto. Questa circostanza ci permette di chiamare, a ragione, $\mathbf{\Omega}$ velocità angolare di rotazione del corpo solido come tale. La velocità del moto traslatorio non ha invece questo carattere « assoluto ».

Dalla prima formula delle (31,3) segue chiaramente che se $\mathbf{V}$ e $\mathbf{\Omega}$ (in un dato istante) sono mutuamente perpendicolari per una qualche scelta dell'origine delle coordinate O, essi (cioè $\mathbf{V}'$ e $\mathbf{\Omega}'$) sono mutuamente perpendicolari anche rispetto a una qualsiasi altra origine O'. Dalla (31,2) si vede che in questo caso le velocità $\mathbf{v}$ di tutti i punti del corpo giacciono nello stesso piano, perpendicolare a $\mathbf{\Omega}$. È sempre possibile intanto scegliere un'origine O' tale che la sua velocità $\mathbf{V}'$ sia nulla[1]), cosicché il moto del solido sarà rappresentato (in un dato istante) come pura rotazione intorno ad un asse passante per O'. Questo asse è detto *asse di istantanea rotazione* del corpo[2]).

In seguito, supporremo sempre che l'origine del sistema di coordinate mobile sia posta nel centro di massa del corpo in modo tale

---

[1]) È ovvio che O' può anche essere un punto fuori del corpo.

[2]) Nel caso generale in cui le direzioni di $\mathbf{V}$ e $\mathbf{\Omega}$ non sono mutuamente perpendicolari, si può scegliere l'origine delle coordinate in modo tale che $\mathbf{V}$ e $\mathbf{\Omega}$ diventino paralleli, cioè il moto (nell'istante dato) sarà composto di una rotazione intorno ad un asse e di una traslazione lungo questo stesso asse.

che anche l'asse di rotazione del corpo passi per questo centro. Quando il corpo si muove, variano in generale sia il valore assoluto di $\mathbf{\Omega}$ che la direzione dell'asse di rotazione.

§ 32. *Tensore d'inerzia*

Per calcolare l'energia cinetica di un corpo solido, consideriamo quest'ultimo come un sistema di punti materiali e scriviamo:

$$T = \sum \frac{mv^2}{2},$$

dove la sommatoria è estesa a tutti i punti che compongono il corpo. Al fine di semplificare la scrittura, ometteremo in questo paragrafo gli indici che enumerano questi punti.

Sostituendovi la (31,2), otteniamo:

$$T = \sum \frac{m}{2} (\mathbf{V} + [\mathbf{\Omega r}])^2 = \sum \frac{m}{2} V^2 + \sum m\mathbf{V}\,[\mathbf{\Omega r}] + \sum \frac{m}{2} [\mathbf{\Omega r}]^2.$$

Le velocità $\mathbf{V}$ e $\mathbf{\Omega}$ sono le stesse per tutti i punti del corpo solido. Quindi possiamo portare nel primo termine $V^2/2$ fuori dal segno di somma; con la lettera μ indicheremo la somma $\sum m$ che è la massa totale del corpo. Nel secondo termine scriviamo

$$\sum m\mathbf{V}\,[\mathbf{\Omega r}] = \sum m\mathbf{r}\,[\mathbf{V\Omega}] = [\mathbf{V\Omega}] \sum m\mathbf{r}.$$

Di qui si vede che, se l'origine del sistema mobile di coordinate si è posto, come già convenuto, nel centro di massa, questo termine si annulla, poiché allora $\Sigma\, m\mathbf{r} = 0$. Infine, dopo aver sviluppato il quadrato del prodotto vettoriale che figura nel terzo termine, otteniamo

$$T = \frac{\mu V^2}{2} + \frac{1}{2} \sum m\{\Omega^2 r^2 - (\mathbf{\Omega r})^2\}. \qquad (32,1)$$

L'energia cinetica di un corpo solido può essere quindi presentata come somma di due termini. Il primo termine di questa somma nella (32,1) rappresenta l'energia cinetica del moto di traslazione del corpo come se tutta la sua massa fosse concentrata nel suo centro di massa. Il secondo termine rappresenta l'energia cinetica del moto di rotazione, con velocità angolare $\mathbf{\Omega}$, intorno ad un asse passante per il centro di massa. Sottolineiamo che la possibilità di separare l'energia cinetica in due parti è condizionata appunto dalla scelta del centro di massa del corpo come origine del sistema di coordinate solidale con il corpo.

Riscrivendo l'energia cinetica di rotazione in simboli tensoriali, cioè mediante le componenti x_i, Ω_i dei vettori **r** ed **Ω** [1]), abbiamo:

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \sum m \{\Omega_i^2 x_l^2 - \Omega_i x_i \Omega_k x_k\} =$$
$$= \frac{1}{2} \sum m \{\Omega_i \Omega_k \delta_{ik} x_l^2 - \Omega_i \Omega_k x_i x_k\} =$$
$$= \frac{1}{2} \Omega_i \Omega_k \sum m (x_l^2 \delta_{ik} - x_i x_k).$$

È stata utilizzata qui l'identità $\Omega_i = \delta_{ik}\Omega_k$, dove δ_{ik} è il tensore unità (le cui componenti sono uguali all'unità per $i = k$, ed a zero per $i \neq k$). Introducendo il tensore

$$I_{ik} = \sum m (x_l^2 \delta_{ik} - x_i x_k), \tag{32,2}$$

otteniamo l'espressione definitiva dell'energia cinetica del corpo solido nella forma

$$T = \frac{\mu V^2}{2} + \frac{1}{2} I_{ik} \Omega_i \Omega_k. \tag{32,3}$$

La funzione di Lagrange del corpo solido si ottiene sottraendo l'energia potenziale dalla (32,3):

$$L = \frac{\mu V^2}{2} + \frac{1}{2} I_{ik} \Omega_i \Omega_k - U. \tag{32,4}$$

L'energia potenziale è in generale funzione di sei variabili che determinano la posizione del corpo solido, per esempio, le tre coordinate X, Y, Z del centro di massa e i tre angoli che definiscono l'orientazione degli assi coordinati mobili rispetto agli assi fissi.

Il tensore I_{ik} si chiama *tensore dei momenti d'inerzia*, o semplicemente *tensore d'inerzia* del corpo. Come risulta chiaro dalla definizione data nella (32,2), il tensore d'inerzia è simmetrico, cioè

$$I_{ik} = I_{ki}. \tag{32,5}$$

Per maggiore evidenza, scriviamo la tabella delle sue componenti in forma esplicita:

$$I_{ik} = \begin{pmatrix} \sum m (y^2 + z^2) & -\sum mxy & -\sum mxz \\ -\sum myx & \sum m (x^2 + z^2) & -\sum myz \\ -\sum mzx & -\sum mzy & \sum m (x^2 + y^2) \end{pmatrix}. \tag{32,6}$$

[1]) In questo capitolo con le lettere i, k, l si denotano indici tensoriali che prendono i valori 1, 2, 3. Inoltre, è usata dappertutto la nota regola secondo la quale il segno di somma viene omesso e la sommatoria sui valori 1, 2, 3 è estesa a tutti gli indici ripetuti (i cosiddetti indici « muti »); cosí, $A_1 B_i = \mathbf{AB}$, $A_l^2 = A_l A_l = \mathbf{A}^2$, ecc. Evidentemente la denotazione degli indici muti può essere cambiata arbitrariamente (purché non coincida con la denotazione di altri indici tensoriali che compaiono nell'espressione data).

Le componenti I_{xx}, I_{yy}, I_{zz} sono talvolta dette momenti d'inerzia rispetto agli assi corrispondenti.

Il tensore d'inerzia è evidentemente additivo: i momenti d'inerzia del corpo sono uguali alle somme dei momenti d'inerzia delle sue parti.

Se il corpo solido può essere considerato come un mezzo continuo, nella definizione (32,2) la somma viene sostituita da un integrale esteso al volume del corpo:

$$I_{ik} = \int \rho \, (x_l^2 \delta_{ik} - x_i x_k) \, dV. \tag{32,7}$$

Come ogni tensore simmetrico di rango due, il tensore d'inerzia può essere ridotto ad una forma diagonale mediante una scelta adeguata delle direzioni degli assi x_1, x_2, x_3. Queste direzioni sono chiamate *assi principali d'inerzia,* ed i valori corrispondenti delle componenti del tensore, *momenti principali d'inerzia,* che indicheremo con I_1, I_2, I_3. Scegliendo in questo modo gli assi x_1, x_2, x_3, l'energia cinetica di rotazione si esprime in modo particolarmente semplice

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} (I_1 \Omega_1^2 + I_2 \Omega_2^2 + I_3 \Omega_3^2). \tag{32,8}$$

Notiamo che ciascuno dei tre momenti principali d'inerzia non può essere superiore alla somma degli altri due, cioè

$$I_1 + I_2 = \sum m \, (x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2) \geqslant \sum m \, (x_1^2 + x_2^2) = I_3 \tag{32,9}$$

Un corpo, i cui tre momenti principali d'inerzia sono differenti, si chiama *trottola asimmetrica.*

Si chiama *trottola simmetrica* un corpo solido per il quale due momenti principali d'inerzia sono uguali: $I_1 = I_2 \neq I_3$. In questo caso, la scelta delle direzioni degli assi principali nel piano $x_1 x_2$ è arbitraria.

Se invece i tre momenti principali d'inerzia sono tutti uguali, il corpo si chiama *trottola sferica.* In questo caso, la scelta dei tre assi principali d'inerzia è arbitraria: come tali si possono prendere tre qualsivogliano assi mutuamente perpendicolari.

La ricerca degli assi principali d'inerzia diventa molto piú semplice, se il corpo solido possiede una certa simmetria; è chiaro che la posizione del centro di massa e la direzione degli assi principali d'inerzia debbono possedere una stessa simmetria.

Per esempio, se un corpo ha un piano di simmetria, il suo centro di massa deve giacere in questo piano. In questo stesso piano giacciono anche due assi principali d'inerzia, mentre il terzo asse è ad esso perpendicolare. Un insieme di particelle distribuite in un piano rappresenta un caso evidente di questo genere. Esiste in questo caso una relazione semplice fra i tre momenti principali d'inerzia. Se come piano $x_1 x_2$ si prende il piano dell'insieme di particelle, ed essendo $x_3 = 0$

per tutte le particelle, abbiamo:

$$I_1 = \sum m x_2^2, \qquad I_2 = \sum m x_1^2, \qquad I_3 = \sum m (x_1^2 + x_2^2),$$

cioè

$$I_3 = I_1 + I_2.$$

Se il corpo possiede un asse di simmetria d'ordine qualunque, il suo centro di massa è situato su questo stesso asse, con il quale coincide anche uno degli assi principali d'inerzia, mentre gli altri due sono ad esso perpendicolari. Se l'ordine dell'asse di simmetria è superiore a 2, il corpo rappresenta una trottola simmetrica. In questo caso, infatti, si può ruotare ciascuno degli assi principali (perpendicolare all'asse di simmetria) di un angolo differente da 180°, cioè la scelta di questi assi non è piú univoca, cosa possibile soltanto nel caso di una trottola simmetrica.

Un caso particolare è quello di un sistema di particelle distribuite lungo una retta. Se si prende questa retta come asse x_3, si avrà per tutte le particelle $x_1 = x_2 = 0$; in questo modo due momenti principali d'inerzia coincideranno, mentre il terzo risulterà nullo:

$$I_1 = I_2 = \sum m x_3^2, \qquad I_3 = 0. \tag{32,11}$$

Un sistema con queste caratteristiche è detto *rotatore*. La caratteristica particolare di un rotatore, a differenza di un corpo qualsiasi, sta nel fatto che esso ha in tutto due (anziché tre) gradi di libertà rotazionali, corrispondenti alle rotazioni intorno agli assi x_1 ed x_2; parlare della rotazione di una retta attorno a se stessa non ha evidentemente alcun senso.

Facciamo finalmente ancora una osservazione riguardo al calcolo del tensore d'inerzia. Sebbene noi abbiamo definito questo tensore rispetto ad un sistema di coordinate avente per origine il centro di massa (solo con questa definizione la formula fondamentale (32,3) è valida), può talvolta risultare opportuno calcolare preliminarmente il tensore analogo

$$I'_{ik} = \sum m (x_l'^2 \delta_{ik} - x_i' x_k'),$$

definito rispetto ad un'altra origine O'. Se la distanza OO' è data da un vettore $\mathbf{a}$, si ha $\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{a}$ ed $x_i = x_i' + a_i$; tenendo anche presente che, per definizione del punto O, $\sum m\mathbf{r} = 0$, troviamo:

$$I'_{ik} = I_{ik} + \mu (a^2 \delta_{ik} - a_i a_k). \tag{32,12}$$

Per mezzo di questa formula e conoscendo I'_{ik} è facile calcolare il tensore I_{ik} cercato.

PROBLEMI

1. Determinare i momenti principali d'inerzia per molecole considerate come un sistema di particelle, situate a distanze reciprocamente fisse, nei seguenti casi:

a) Molecola i cui atomi sono distribuiti su una retta.
Risposta:

$$I_1 = I_2 = \frac{1}{\mu} \sum_{a \neq b} m_a m_b l_{ab}^2, \qquad I_3 = 0,$$

dove m_a, m_b sono le masse degli atomi, l_{ab} è la distanza tra gli atomi a e b; la somma è estesa a tutte le coppie d'atomi nella molecola (ogni coppia dei valori a e b vien presa una volta sola).

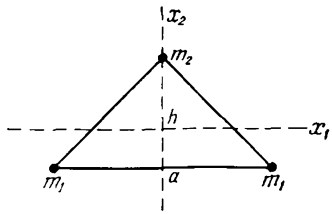


Fig. 36

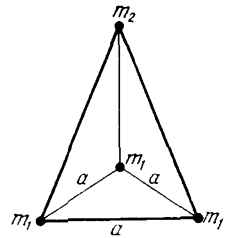


Fig. 37

Per una molecola biatomica la somma si riduce ad un solo termine, dando un risultato evidente a priori: il prodotto della massa ridotta dei due atomi per il quadrato della loro distanza:

$$I_1 = I_2 = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} l^2.$$

b) Molecola triatomica avente la forma di un triangolo isoscele (fig. 36).
Risposta: Il centro di massa si trova sull'altezza del triangolo a distanza $X_2 = m_2 h/\mu$ dalla sua base. I momenti d'inerzia sono:

$$I_1 = \frac{2m_1 m_2}{\mu} h^2, \qquad I_2 = \frac{m_1}{2} a^2, \qquad I_3 = I_1 + I_2.$$

c) Molecola tetratomica i cui atomi sono situati nei vertici di una piramide triangolare retta (fig. 37).
Risposta: Il centro di massa si trova sull'altezza della piramide a distanza $X_3 = m_2 h/\mu$ dalla sua base. I momenti d'inerzia sono:

$$I_1 = I_2 = \frac{3m_1 m_2}{\mu} h^2 + \frac{m_1 a^2}{2}, \qquad I_3 = m_1 a^2.$$

Per $m_1 = m_2$, $h = a\sqrt{2/3}$ otteniamo una molecola tetraedrica con momenti d'inerzia

$$I_1 = I_2 = I_3 = m_1 a^2.$$

2. Determinare i momenti principali d'inerzia dei seguenti corpi continui omogenei:
a) Asta sottile di lunghezza l.
Risposta: $I_1 = I_2 = \frac{1}{12}\mu l^2$, $I_3 = 0$ (si trascura lo spessore dell'asta).
b) Sfera di raggio R.
Risposta:

$$I_1 = I_2 = I_3 = \frac{2}{5} \mu R^2$$

(È piú comodo calcolare prima la somma $I_1 + I_2 + I_3 = 2\rho \int r^2 dV$).

c) Cilindro circolare di raggio R e d'altezza h.
Risposta:

$$I_1 = I_2 = \frac{\mu}{4}\left(R^2 + \frac{h^2}{3}\right), \qquad I_3 = \frac{\mu}{2} R^2$$

(x_3 asse del cilindro).
d) Parallelepipedo rettangolo di spigoli a, b, c.
Risposta:

$$I_1 = \frac{\mu}{12}(b^2 + c^2), \quad I_2 = \frac{\mu}{12}(c^2 + a^2), \quad I_3 = \frac{\mu}{12}(a^2 + b^2)$$

(gli assi x_1, x_2, x_3 sono paralleli agli spigoli a, b, c).

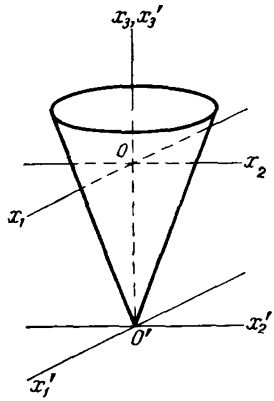


Fig. 38

e) Cono circolare d'altezza h e di raggio di base R.
Soluzione. Calcoliamo dapprima il tensore I'_{ik} rispetto agli assi aventi per origine il vertice del cono (fig. 38). Il calcolo si esegue facilmente in coordinate cilindriche e dà:

$$I'_1 = I'_2 = \frac{3}{5}\mu\left(\frac{R^2}{4} + h^2\right), \qquad I'_3 = \frac{3}{10}\mu R^2.$$

Il baricentro si trova, come segue da un semplice calcolo, sull'asse del cono a distanza $a = 3h/4$ dal vertice. Con la formula (32,12) troviamo infine:

$$I_1 = I_2 = I'_1 - \mu a^2 = \frac{3}{20}\mu\left(R^2 + \frac{h^2}{4}\right),$$

$$I_3 = I'_3 = \frac{3}{10}\mu R^2.$$

f) Ellissoide triassico con semiassi a, b, c.
Soluzione. Il centro di massa coincide con il centro dell'ellissoide, e gli assi principali d'inerzia con i suoi assi. L'integrazione estesa al volume dell'ellissoide può essere ridotta ad una integrazione rispetto al volume di una sfera mediante una sostituzione adeguata delle coordinate $x = a\xi$, $y = b\eta$, $z = c\zeta$ che trasforma l'equazione della superficie dell'ellissoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

in equazione della superficie di una sfera di raggio unitario

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1.$$

Si ottiene dunque per il momento d'inerzia relativo all'asse x:

$$I_1 = \rho \iiint (y^2 + z^2)\, dx\, dy\, dz = \rho abc \iiint (b^2\eta^2 + c^2\zeta^2)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta =$$

$$= abc\, \frac{1}{2} I' (b^2 + c^2),$$

dove I' è il momento d'inerzia della sfera di raggio unitario.

Tenendo presente che il volume dell'ellissoide è uguale a $4\pi abc/3$, troviamo in definitiva i momenti d'inerzia:

$$I_1 = \frac{\mu}{5}(b^2 + c^2), \quad I_2 = \frac{\mu}{5}(a^2 + c^2), \quad I_3 = \frac{\mu}{5}(a^2 + b^2).$$

3. Determinare la frequenza delle piccole oscillazioni di un pendolo fisico (corpo solido oscillante in un campo di gravità attorno ad un asse orizzontale fisso).

Soluzione. Sia l la distanza del centro di massa del pendolo dall'asse di rotazione, siano α, β, γ gli angoli formati dalle direzioni dei suoi assi principali

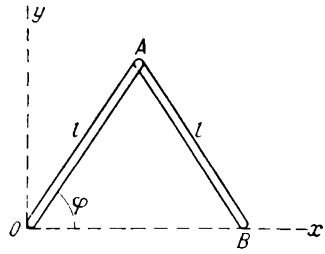


Fig. 39

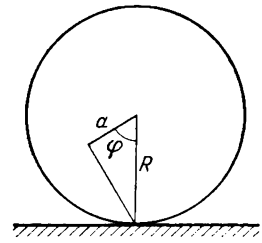


Fig. 40

d'inerzia con l'asse di rotazione. Introduciamo come coordinata variabile l'angolo φ formato dalla verticale e la perpendicolare abbassata dal centro di massa sull'asse di rotazione. La velocità del centro di massa è $V = l\dot{\varphi}$, e le proiezioni della velocità angolare sugli assi principali d'inerzia: $\dot{\varphi}\cos\alpha$, $\dot{\varphi}\cos\beta$, $\dot{\varphi}\cos\gamma$. Supponendo piccolo l'angolo φ, troviamo l'energia potenziale nella forma

$$U = \mu g l\,(1-\cos\varphi) \approx \frac{1}{2}\mu g l \varphi^2.$$

La funzione di Lagrange è quindi

$$L = \frac{\mu l^2}{2}\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}(I_1\cos^2\alpha + I_2\cos^2\beta + I_3\cos^2\gamma)\,\dot{\varphi}^2 - \frac{\mu g l^2}{2}\varphi^2.$$

Di qui ricaviamo la frequenza delle oscillazioni

$$\omega^2 = \frac{\mu g l}{\mu l^2 + I_1\cos^2\alpha + I_2\cos^2\beta + I_3\cos^2\gamma}.$$

4. Trovare l'energia cinetica del sistema rappresentato nella fig. 39; OA ed AB sono sbarre sottili omogenee di lunghezza l, congiunte a cerniera nel punto A. La sbarra OA ruota (nel piano della figura) intorno al punto O, e l'estremità B della sbarra AB scivola lungo l'asse Ox.

Soluzione. La velocità del centro di massa della sbarra OA (situato a metà di quest'ultima) è $l\dot{\varphi}/2$, dove φ è l'angolo AOB. Dunque, l'energia cinetica della sbarra OA è

$$T_1 = \frac{\mu l^2}{8}\dot{\varphi}^2 + \frac{I}{2}\dot{\varphi}^2$$

(μ massa di una sbarra).

Le coordinate cartesiane del centro di massa della sbarra AB sono $X = \frac{3l}{2}\cos\varphi$, $Y = \frac{l}{2}\operatorname{sen}\varphi$; poiché anche la velocità angolare di rotazione di questa sbarra è uguale a $\dot{\varphi}$, la sua energia cinetica è

$$T_2 = \frac{\mu}{2}(\dot{X}^2 + \dot{Y}^2) + \frac{I}{2}\dot{\varphi}^2 = \frac{\mu l^2}{8}(1 + 8\operatorname{sen}^2\varphi)\,\dot{\varphi}^2 + \frac{I\dot{\varphi}^2}{2}.$$

L'energia cinetica totale del sistema è

$$T = \frac{\mu l^2}{3}(1 + 3\,\mathrm{sen}^2\varphi)\dot{\varphi}^2$$

(è stato posto $I = \mu l^2/12$ come dal problema 2,*a*).

5. Trovare l'energia cinetica di un cilindro (di raggio R) che rotola su un piano. La massa del cilindro è distribuita nel suo volume in modo tale che uno degli assi principali d'inerzia è parallelo all'asse del cilindro e passa a distanza a da questo asse; il momento d'inerzia rispetto a questo asse principale è I.

Soluzione. Introduciamo l'angolo φ tra la verticale e la perpendicolare abbassata dal baricentro sull'asse del cilindro (fig. 40). Si può considerare il

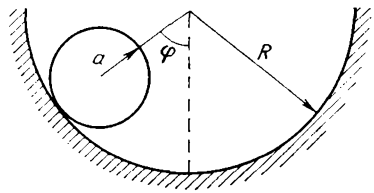


Fig. 41

moto del cilindro in ogni istante come una rotazione pura intorno all'asse istantaneo che coincide con la linea di contatto del cilindro con il piano fisso; la velocità angolare di questa rotazione è $\dot{\varphi}$ (la velocità angolare di rotazione

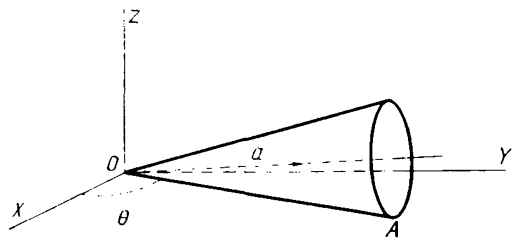


Fig. 42

intorno a tutti gli assi paralleli è uguale). Il centro d'inerzia si trova a distanza $\sqrt{a^2 + R^2 - 2aR\cos\varphi}$ dall'asse istantaneo e la sua velocità è quindi $V = \dot{\varphi}\sqrt{a^2 + R^2 - 2aR\cos\varphi}$. L'energia cinetica totale è

$$T = \frac{\mu}{2}(a^2 + R^2 - 2aR\cos\varphi)\dot{\varphi}^2 + \frac{I}{2}\dot{\varphi}^2.$$

6. Trovare l'energia cinetica di un cilindro omogeneo di raggio a che rotola sulla faccia interna di una superficie cilindrica di raggio R (fig. 41).

Soluzione. Introduciamo l'angolo φ tra la retta che congiunge i centri dei due cilindri e la verticale. Il centro di massa del cilindro rotolante si trova sull'asse e la sua velocità è $V = \dot{\varphi}(R - a)$. Calcoliamo la velocità angolare come velocità di rotazione pura intorno all'asse istantaneo che coincide con la

linea di contatto dei due cilindri; essa è

$$\Omega = \frac{V}{a} = \dot{\varphi}\,\frac{R-a}{a}\,.$$

Se I_3 è il momento d'inerzia rispetto all'asse del cilindro, si ha allora

$$T = \frac{\mu}{2}\,(R-a)^2\,\dot{\varphi}^2 + \frac{I_3}{2}\,\frac{(R-a)^2}{a^2}\,\dot{\varphi}^2 = \frac{3}{4}\,\mu\,(R-a)^2\,\dot{\varphi}^2$$

(I_3 ricavato dal problema 2,*c*)).

7. Trovare l'energia cinetica di un cono omogeneo che rotola su un piano.

Soluzione. Denotiamo con θ l'angolo tra la linea OA di contatto del cono col piano e una direzione fissa in questo piano (fig. 42). Il centro di massa

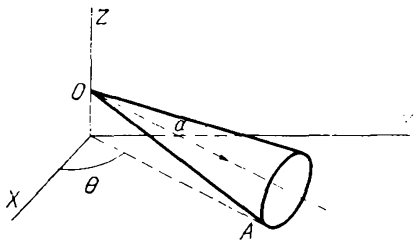


Fig. 43

si trova sull'asse del cono e la sua velocità è $V = a\cos\alpha\cdot\dot{\theta}$, dove 2α è l'angolo d'apertura del cono, ed a la distanza del centro di massa dal vertice. Calcoliamo la velocità angolare di rotazione come velocità di rotazione pura intorno all'asse istantaneo OA:

$$\Omega = \frac{V}{a\,\mathrm{sen}\,\alpha} = \dot{\theta}\,\mathrm{ctg}\,\alpha.$$

Uno degli assi principali d'inerzia (asse x_3) coincide con l'asse del cono; scegliamo l'asse x_2 perpendicolare all'asse del cono ed alla retta OA. Le proiezioni del vettore Ω (diretto parallelamente ad OA) sugli assi principali d'inerzia saranno allora $\Omega\,\mathrm{sen}\,\alpha$, 0, $\Omega\cos\alpha$. Troviamo dunque per l'energia cinetica cercata:

$$T = \frac{\mu a^2}{2}\cos^2\alpha\cdot\dot{\theta}^2 + \frac{I_1}{2}\cos^2\alpha\cdot\dot{\theta}^2 + \\ + \frac{I_3}{2}\,\frac{\cos^4\alpha}{\mathrm{sen}^2\,\alpha}\,\dot{\theta}^2 = \frac{3\mu h^2}{40}\,\dot{\theta}^2\,(1+5\cos^2\alpha)$$

(h altezza del cono, I_1, I_2, a ricavati dal problema 2,*e*)).

8. Trovare l'energia cinetica di un cono omogeneo la cui base rotola su un piano e il cui vertice si trova costantemente al di sopra di questo piano, ad un'altezza uguale al raggio della base (in modo che l'asse del cono è parallelo al piano).

Soluzione. Introduciamo l'angolo θ tra una direzione data nel piano e la proiezione su quest'ultimo dell'asse del cono (fig. 43). La velocità del centro di massa è allora $V = a\dot{\theta}$ (usiamo le stesse notazioni del problema 7). L'asse istantaneo di rotazione è rappresentato qui dalla generatrice OA del cono condotta al punto di contatto di quest'ultimo con il piano. Il centro di massa

è distante a sen α da questo asse e, di conseguenza,

$$\Omega = \frac{V}{a \operatorname{sen} \alpha} = \frac{\dot{\theta}}{\operatorname{sen} \alpha}.$$

Le proiezioni del vettore Ω sugli assi principali d'inerzia (scegliendo l'asse x_2 perpendicolare all'asse del cono ed alla retta OA) sono: $\Omega \operatorname{sen} \alpha = \dot{\theta}$, 0, $\Omega \cos \alpha = \dot{\theta} \operatorname{ctg} \alpha$. L'energia cinetica è quindi

$$T = \frac{\mu a^2}{2} \dot{\theta}^2 + \frac{I_1}{2} \dot{\theta}^2 + \frac{I_3}{2} \dot{\theta}^2 \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{3\mu h^2}{40} \dot{\theta}^2 \left(\frac{1}{\cos^2 \alpha} + 5 \right).$$

9. Trovare l'energia cinetica di un ellissoide triassico omogeneo, rotante intorno ad uno dei suoi assi (AB, fig. 44), mentre quest'ultimo ruota a sua volta intorno alla perpendicolare CD passante per il centro dell'ellissoide.

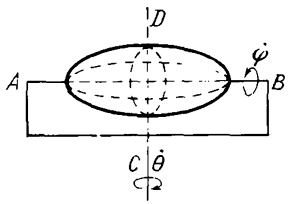


Fig. 44

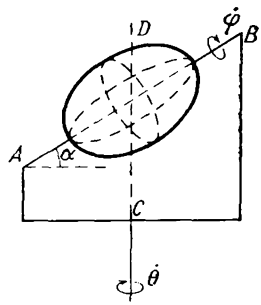


Fig. 45

Soluzione. Indichiamo con θ l'angolo di rotazione intorno all'asse CD e con φ l'angolo di rotazione intorno all'asse AB (angolo formato da CD e dall'asse d'inerzia x_1 perpendicolare ad AB). Le proiezioni di Ω sugli assi d'inerzia saranno allora

$$\dot{\theta} \cos \varphi, \qquad \dot{\theta} \operatorname{sen} \varphi, \qquad \dot{\varphi}$$

(l'asse x_3 coincide con AB). Poiché il centro d'inerzia, che coincide con il centro dell'ellissoide, è fisso, l'energia cinetica è

$$T = \frac{1}{2} (I_1 \cos^2 \varphi + I_2 \operatorname{sen}^2 \varphi) \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} I_3 \dot{\varphi}^2.$$

10. Lo stesso problema con l'asse AB inclinato e l'ellissoide simmetrico rispetto a questo asse (fig. 45).

Soluzione. Le proiezioni di Ω sull'asse AB e sui due altri assi principali d'inerzia perpendicolari ad AB (che si possono scegliere arbitrariamente) sono:

$$\dot{\theta} \cos \alpha \cos \varphi, \quad \dot{\theta} \cos \alpha \operatorname{sen} \varphi, \quad \dot{\varphi} + \dot{\theta} \operatorname{sen} \alpha.$$

D'onde l'energia cinetica è

$$T = \frac{I_1}{2} \cos^2 \alpha \cdot \dot{\theta}^2 + \frac{I_3}{2} (\dot{\varphi} + \dot{\theta} \operatorname{sen} \alpha)^2.$$

§ 33. *Momento della quantità di moto di un solido*

Il momento della quantità di moto dipende, come è noto, dalla scelta del punto rispetto al quale esso è definito. Nella meccanica dei solidi, è più razionale scegliere questo punto coincidente con l'origine del sistema di coordinate mobile, cioè con il baricentro del corpo. In seguito indicheremo con **M** il momento definito precisamente in questo modo.

Secondo la formula (9,6), la scelta del baricentro del corpo come origine delle coordinate fa coincidere il momento **M** con il « momento proprio » vincolato al moto dei punti del corpo solo rispetto al baricentro. In altri termini, nella definizione $\mathbf{M} = \sum m\,[\mathbf{rv}]$ bisogna sostituire **v** con $[\mathbf{\Omega r}]$:

$$\mathbf{M} = \sum m\,[\mathbf{r}\,[\mathbf{\Omega r}]] = \sum m\,\{r^2\mathbf{\Omega} - \mathbf{r}\,(\mathbf{r\Omega})\},$$

ossia, in simboli tensoriali,

$$M_i = \sum m\,\{x_l^2\Omega_i - x_i x_k \Omega_k\} = \Omega_k \sum m\,\{x_l^2\delta_{ik} - x_i x_k\}.$$

Tenendo presente la definizione (32,2) del tensore d'inerzia, otteniamo:

$$M_i = I_{ik}\Omega_k. \tag{33,1}$$

Se gli assi x_1, x_2, x_3 sono diretti lungo gli assi principali d'inerzia del corpo, questa formula dà:

$$M_1 = I_1\Sigma_1, \quad M_2 = I_2\Omega_2, \quad M_3 = I_3\Omega_3. \tag{33,2}$$

In particolare, per una trottola sferica i cui tre momenti principali d'inerzia coincidono, si ha semplicemente:

$$\mathbf{M} = I\mathbf{\Omega} \tag{33,3}$$

cioè il vettore momento è proporzionale al vettore velocità angolare ed hanno ambedue la medesima direzione.

Nel caso generale di un corpo qualunque la direzione del vettore **M** non coincide con quella del vettore $\mathbf{\Omega}$; soltanto per una rotazione del corpo intorno ad uno dei suoi assi principali d'inerzia che **M** e $\mathbf{\Omega}$ hanno la stessa direzione.

Consideriamo il moto libero di un corpo solido non sottoposto all'azione di forze esterne. Escludendo il moto traslatorio uniforme che non presenta qui alcun interesse, abbiamo a che fare con una rotazione libera del corpo.

Come in ogni sistema isolato, il momento angolare di un corpo animato da una rotazione libera è costante. Per una trottola sferica dalla condizione **M** = costante segue che $\mathbf{\Omega}$ = costante. Ciò significa che il caso generale della rotazione libera di una trottola sferica si riduce ad una rotazione uniforme intorno ad un asse costante.

Altrettanto semplice è il caso del rotatore. Anche qui $\mathbf{M} = I\Omega$, essendo il vettore Ω perpendicolare all'asse del rotatore. Di conseguenza, la rotazione libera di un rotatore è una rotazione uniforme in un piano intorno ad una direzione perpendicolare a questo piano.

La legge di conservazione del momento è sufficiente per definire anche una rotazione libera piú complessa di una trottola simmetrica.

Approfittando della possibilità di scegliere arbitrariamente le direzioni degli assi principali d'inerzia x_1, x_2 (perpendicolari all'asse

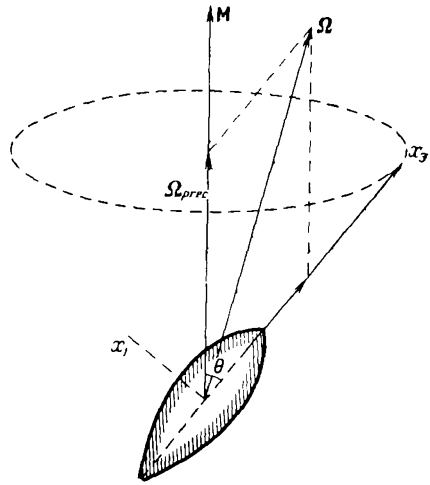


Fig. 46

di simmetria x_3 della trottola), scegliamo l'asse x_2 perpendicolare al piano definito dal vettore costante $\mathbf{M}$ e dalla posizione istantanea dell'asse x_3. In questo caso $M_2 = 0$, e dalla formula (32,2) risulta chiaro che anche $\Omega_2 = 0$. Ciò significa che in ogni istante le direzioni di $\mathbf{M}$, Ω e dell'asse della trottola vengono a trovarsi in uno stesso piano (fig. 46). Ne segue inoltre che le velocità $\mathbf{v} = [\Omega \mathbf{r}]$ di tutti i punti situati sull'asse della trottola sono, in ogni istante, dirette perpendicolarmente al detto piano; in altri termini, l'asse della trottola ruota uniformemente (vedi piú avanti) intorno alla direzione di $\mathbf{M}$ descrivendo un cono circolare (la cosiddetta *precessione regolare* della trottola). Contemporaneamente alla precessione la trottola compie un moto rotazionale uniforme intorno al proprio asse.

È facile esprimere le velocità angolari di queste due rotazioni mediante il valore dato del momento M e l'angolo θ d'inclinazione dell'asse della trottola rispetto alla direzione di $\mathbf{M}$. La velocità angolare di rotazione della trottola intorno al proprio asse è data

dalla proiezione Ω_3 del vettore Ω su questo stesso asse:

$$\Omega_3 = \frac{M_3}{I_3} = \frac{M}{I_3} \cos\theta. \tag{33,4}$$

Per determinare la velocità di precessione Ω_{pr} bisogna scomporre il vettore Ω secondo la regola del parallelogrammo nelle sue componenti lungo le direzioni x_3 e **M**. La prima componente non porta ad alcun spostamento dell'asse della trottola, ed è quindi la seconda componente a dare la velocità angolare di precessione cercata. Dalla costruzione della fig. 46 risulta che sen $\theta\Omega_{pr} = \Omega_1$, e poiché $\Omega_1 = M_1/I_1 = M$ sen θ/I_1, si ha

$$\Omega_{pr} = \frac{M}{I_1}. \tag{33,5}$$

§ 34. *Equazioni del moto di un corpo solido*

Poiché un corpo solido possiede generalmente sei gradi di libertà, nel sistema generale d'equazioni del moto ci devono essere sei equazioni indipendenti, che possono essere scritte in una forma che definisce le derivate rispetto al tempo di due vettori: l'impulso ed il momento angolare del corpo.

La prima di queste equazioni si ottiene semplicemente, sommando le equazioni $\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{f}$ del moto di ciascuna delle particelle componenti del corpo, dove **p** è l'impulso di una particella ed **f** la forza agente su di essa. Introducendo l'impulso totale del corpo

$$\mathbf{P} = \sum \mathbf{p} = \mu \mathbf{V}$$

e la forza totale $\sum \mathbf{f} = \mathbf{F}$ che agisce su di esso, otteniamo:

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \mathbf{F}. \tag{34,1}$$

Sebbene abbiamo scritto **F** come la somma di tutte le forze **f** agenti su ciascuna particella, comprese le forze generate dalle altre particelle del corpo, in realtà fanno parte di **F** soltanto le forze esterne. Tutte le forze d'interazione tra le particelle del corpo stesso si annullano reciprocamente; infatti, in assenza di forze esterne, l'impulso del corpo, come per qualsiasi altro sistema isolato, si conserva, cioè deve essere $\mathbf{F} = 0$.

Se U è l'energia potenziale del corpo solido in un campo esterno, la forza **F** può essere determinata derivando U rispetto alle coordinate del centro di massa del corpo:

$$\mathbf{F} = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{R}}. \tag{34,2}$$

Infatti, per uno spostamento traslatorio $\delta\mathbf{R}$ del corpo, di questo stesso valore variano i raggi vettori $\mathbf{r}$ di ogni punto del corpo, e la variazione dell'energia potenziale è quindi

$$\delta U = \sum \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}} \delta \mathbf{r} = \delta \mathbf{R} \sum \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}} = -\delta \mathbf{R} \sum \mathbf{f} = -\mathbf{F}\delta\mathbf{R}.$$

Osserviamo a proposito che l'equazione (34,1) può essere ottenuta anche come equazione di Lagrange rispetto alle coordinate del centro di massa

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \mathbf{V}} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{R}}$$

dalla funzione di Lagrange (32,4), per la quale

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{V}} = \mu \mathbf{V} = \mathbf{P}, \qquad \frac{\partial L}{\partial \mathbf{R}} = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{R}} = \mathbf{F}.$$

Stabiliamo ora la seconda equazione del moto che determina la derivata rispetto al tempo del momento d'impulso $\mathbf{M}$. Per semplificare i calcoli, è opportuno scegliere un sistema di riferimento « immobile » (inerziale) tale che ad un istante dato il centro di massa del corpo sia in quiete. L'equazione del moto cosí ottenuta sarà valida, in virtú del principio di relatività galileiano, in ogni altro sistema inerziale di riferimento.

Abbiamo:

$$\dot{\mathbf{M}} = \frac{d}{dt} \sum [\mathbf{rp}] = \sum [\dot{\mathbf{r}}\mathbf{p}] + \sum [\mathbf{r}\dot{\mathbf{p}}].$$

In seguito alla nostra scelta del sistema di riferimento (nel quale $\mathbf{V} = 0$), il valore di $\dot{\mathbf{r}}$ nell'istante dato coincide con la velocità $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$. Poiché i vettori $\mathbf{v}$ e $\mathbf{p} = m\boldsymbol{v}$ hanno una stessa direzione, $[\dot{\mathbf{r}}\mathbf{p}] = 0$. Sostituendo anche $\dot{\mathbf{p}}$ con la forza $\mathbf{f}$, avremo infine:

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = \mathbf{K}, \tag{34,3}$$

dove

$$\mathbf{K} = \sum [\mathbf{rf}]. \tag{34,4}$$

Il vettore $[\mathbf{rf}]$ è detto *momento della forza* $\mathbf{f}$; $\mathbf{K}$ è quindi la somma dei momenti di tutte le forze agenti sul corpo. Come per la forza totale $\mathbf{F}$, anche qui si deve tener conto nella somma (34,4) solo delle forze esterne; conformemente alla legge di conservazione del momento angolare, la somma dei momenti di tutte le forze agenti all'interno del sistema isolato deve annullarsi.

Il momento della forza, come il momento angolare, dipende generalmente dalla scelta dell'origine delle coordinate rispetto alla quale esso è definito. Nelle (34,3) e (34,4) i momenti sono definiti rispetto al centro di massa del corpo.

Quando l'origine delle coordinate viene spostata di una distanza **a**, i nuovi raggi vettori **r'** dei punti del corpo sono legati a quelli vecchi **r** dalla relazione $\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{a}$. Si ha quindi

$$\mathbf{K} = \sum [\mathbf{rf}] = \sum [\mathbf{r}'\mathbf{f}] + \sum [\mathbf{af}]$$

ossia

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}' + [\mathbf{aF}]. \tag{34,5}$$

Da questa relazione risulta in particolare che il valore del momento delle forze, se la forza totale $\mathbf{F} = 0$, non dipende dalla scelta dell'origine delle coordinate (si dice in questo caso che al corpo è applicata una *coppia di forze*).

L'equazione (34,3) si può considerare come equazione di Lagrange

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \Omega} = \frac{\partial L}{\partial \varphi}$$

rispetto a « coordinate rotazionali ». Infatti, derivando la funzione di Lagrange (32,4) rispetto alle componenti del vettore $\mathbf{\Omega}$, si ottiene

$$\frac{\partial L}{\partial \Omega_i} = I_{ik}\Omega_k = M_i.$$

Mentre la variazione dell'energia potenziale U per una rotazione del corpo di un angolo infinitesimale $\delta\varphi$ è

$$\delta U = -\sum \mathbf{f}\,\delta\mathbf{r} = -\sum \mathbf{f}\,[\delta\varphi \cdot \mathbf{r}] = -\,\delta\varphi \sum \mathbf{f}\,[\mathbf{r}] = -\,\mathbf{K}\delta\varphi,$$

da cui

$$\mathbf{K} = -\frac{\partial U}{\partial \varphi}, \tag{34,6}$$

cosicché

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = -\frac{\partial U}{\partial \varphi} = \mathbf{K}.$$

Supponendo che i vettori **F** e **K** siano mutuamente perpendicolari, si può sempre trovare un vettore **a** tale che **K'** si annulli nella (34,5) e si abbia

$$\mathbf{K} = [\mathbf{aF}]. \tag{34,7}$$

La scelta di **a** non è però univoca: aggiungendo ad **a** qualsiasi vettore parallelo ad **F**, resta valida l'uguaglianza (34,7), cosicché la condizione $\mathbf{K}' = 0$ definisce non un punto solo nel sistema di coordinate mobile, bensí tutta una retta. Cosí, per $\mathbf{K} \perp \mathbf{F}$ l'azione di tutte le forze applicate al corpo può essere ridotta ad una unica forza **F** agente lungo una determinata retta.

Questo è, in particolare, il caso di un campo di forze omogeneo, nel quale la forza agente su un punto materiale è della forma $\mathbf{f} = e\mathbf{E}$, dove **E** è un vettore costante che caratterizza il campo, ed e è una grandezza che caratterizza le proprietà della particella nel

campo dato[1]). Abbiamo in questo caso:

$$\mathbf{F} = \mathbf{E} \sum e, \quad \mathbf{K} = [\sum e\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}].$$

Ponendo $\sum e \neq 0$, introduciamo il raggio vettore $\mathbf{r}_0$ definito dalla relazione:

$$\mathbf{r}_0 = \frac{\sum e\mathbf{r}}{\sum e}. \tag{34,8}$$

Otteniamo per il momento totale delle forze l'espressione molto semplice

$$\mathbf{K} = [\mathbf{r}_0 \mathbf{F}]. \tag{34,9}$$

Per il moto di un corpo solido in un campo omogeneo, l'influenza di quest'ultimo si riduce quindi all'azione di una sola forza **F**, « applicata » al punto col raggio vettore (34,8). La posizione di questo punto è completamente definita dalle proprietà del corpo stesso; per esempio, in un campo di gravità questo punto coincide con il centro di massa del corpo.

§ 35. *Angoli di Eulero*

Come abbiamo già visto, per descrivere il moto di un corpo solido si possono utilizzare le tre coordinate del centro di massa del corpo e tre angoli che determinino l'orientazione degli assi x_1, x_2, x_3 del sistema di coordinate mobile rispetto al sistema immobile X, Y, Z. Spesso risulta piú comodo usare come terna di angoli i cosiddetti *angoli di Eulero*.

Poiché ci interessano per il momento soltanto gli angoli tra gli assi coordinati, scegliamo per origine di ambedue i sistemi uno stesso punto (fig. 47). Il piano mobile x_1x_2 taglia il piano fisso XY lungo una retta (ON nella fig. 47) detta *linea dei nodi*. Questa linea è evidentemente perpendicolare sia all'asse Z che all'asse x_3; come senso positivo, scegliamo quello che corrisponde al senso del prodotto vettoriale $[\mathbf{z}\mathbf{x}_3]$ (dove $\mathbf{z}$ e $\mathbf{x}_3$ sono i versori degli assi Z e x_3).

Per grandezze che definiscono la posizione degli assi x_1, x_2, x_3 rispetto agli assi X, Y, Z prendiamo i seguenti angoli: l'angolo θ tra gli assi Z ed x_3, l'angolo φ tra gli assi X ed N, l'angolo ψ tra gli assi N ed x_1. Gli angoli φ e ψ sono contati positivamente nel senso determinato dalla regola della vite, rispettivamente, intorno agli assi

---

[1]) Cosí, in un campo elettrico uniforme, **E** è l'intensità del campo ed e la carica della particella. In un campo uniforme di gravità, **E** è l'accelerazione di gravità **g** ed e la massa della particella.

Z ed x_3. L'angolo θ prende i valori da 0 a π, e gli angoli φ e ψ da 0 a 2π[1]).

Esprimiamo ora le componenti del vettore velocità angolare $\mathbf{\Omega}$ lungo gli assi mobili x_1, x_2, x_3 mediante gli angoli di Eulero e le loro derivate. A tale fine bisogna proiettare su questi assi le velocità

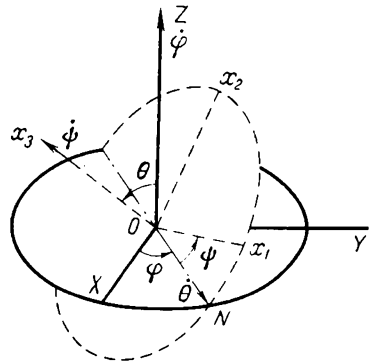


Fig. 47

angolari $\dot{\theta}$, $\dot{\varphi}$, $\dot{\psi}$. La velocità angolare $\dot{\theta}$ è diretta lungo la linea de nodi ON e le sue componenti sugli assi x_1, x_2, x_3 sono

$$\dot{\theta}_1 = \dot{\theta}\cos\psi, \quad \dot{\theta}_2 = -\dot{\theta}\,\mathrm{sen}\,\psi, \quad \dot{\theta}_3 = 0.$$

La velocità angolare $\dot{\varphi}$ è diretta lungo l'asse Z; la sua proiezione sull'asse x_3 è uguale a $\dot{\varphi}_3 = \dot{\varphi}\cos\theta$, e la proiezione sul piano x_1x_2 è uguale a $\dot{\varphi}\,\mathrm{sen}\,\theta$. Prendendo le componenti di quest'ultima sugli assi x_1 ed x_2, otteniamo:

$$\dot{\varphi}_1 = \dot{\varphi}\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\psi, \quad \dot{\varphi}_2 = \dot{\varphi}\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\psi.$$

La velocità angolare $\dot{\psi}$ è diretta infine lungo l'asse x_3.

Riunendo tutte le componenti per ciascuno degli assi, otteniamo finalmente

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= \dot{\varphi}\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\psi + \dot{\theta}\cos\psi, \\ \Omega_2 &= \dot{\varphi}\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\psi - \dot{\theta}\,\mathrm{sen}\,\psi, \\ \Omega_3 &= \dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi}. \end{aligned} \tag{35,1}$$

---

[1]) Gli angoli θ e $\varphi - \pi/2$ sono, rispettivamente, l'angolo polare e l'azimut della direzione di x_3 rispetto agli assi X, Y, Z. Nello stesso tempo θ e $\pi/2 - \psi$ sono, rispettivamente, l'angolo polare e l'azimut della direzione di Z rispetto agli assi x_1, x_2, x_3.

Scegliendo come assi x_1, x_2, x_3 gli assi principali d'inerzia del solido, l'energia cinetica di rotazione espressa mediante gli angoli di Eulero si ottiene ponendo le (35,1) nella (32,8).

Per la trottola simmetrica, per la quale $I_1 = I_2 \neq I_3$, dopo una semplice riduzione, si ottiene:

$$T_{rot} = \frac{I_1}{2}(\dot{\varphi}^2 \operatorname{sen}^2\theta + \dot{\theta}^2) + \frac{I_3}{2}(\dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi})^2. \qquad (35,2)$$

Notiamo che questa espressione può essere ancora ulteriormente semplificata se si considera che la scelta delle direzioni per gli assi principali d'inerzia x_1, x_2 della trottola simmetrica è arbitraria. Considerando che l'asse x_1 coincide con l'asse dei nodi ON, cioè $\psi = 0$,

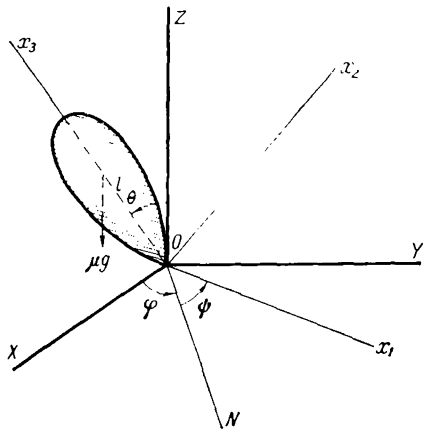


Fig. 48

avremo per le componenti della velocità angolare le espressioni piú semplici:

$$\Omega_1 = \dot{\theta}, \quad \Omega_2 = \dot{\varphi}\operatorname{sen}\theta, \quad \Omega_3 = \dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi}. \qquad (35,3)$$

A titolo d'esempio di applicazione degli angoli di Eulero, determiniamo, con l'aiuto di quest'ultimi, il moto libero della trottola simmetrica, che ci è già noto.

Facciamo coincidere l'asse Z del sistema di coordinate immobile con la direzione del momento costante $\mathbf{M}$ della trottola. L'asse x_3 del sistema mobile è diretto come l'asse della trottola; supponiamo che l'asse x_1 coincida in un dato istante con l'asse dei nodi. Le formule (35,3) ci danno allora per le componenti del vettore $\mathbf{M}$:

$$M_1 = I_1\Omega_1 = I_1\dot{\theta}, \quad M_2 = I_1\Omega_2 = I_1\dot{\varphi}\operatorname{sen}\theta,$$
$$M_3 = I_3\Omega_3 = I_3(\dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi}).$$

D'altra parte, poiché l'asse x_1 (linea dei nodi) è perpendicolare all'asse Z, abbiamo:

$$M_1 = 0, \quad M_2 = M \operatorname{sen} \theta, \quad M_3 = M \cos \theta.$$

Uguagliando queste espressioni, otteniamo le seguenti equazioni:

$$\dot{\theta} = 0, \quad I_1 \dot{\varphi} = M, \quad I_3 (\dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi}) = M \cos \theta. \tag{35,4}$$

La prima di queste equazioni dà θ = costante, cioè l'angolo d'inclinazione dell'asse della trottola rispetto alla direzione di **M** è costante. La seconda definisce [in accordo con la (33,5)] la velocità angolare di precessione $\dot{\varphi} = M/I_1$. Ed infine, la terza equazione determina la velocità angolare di rotazione della trottola intorno al proprio asse $\Omega_3 = M \cos \theta / I_3$.

PROBLEMI

1. Ridurre a quadratura il problema del moto di una trottola simmetrica pesante il cui punto inferiore è fisso (fig. 48).

Soluzione. Prendiamo il punto fisso della trottola O per origine comune dei sistemi di coordinate mobile e immobile e l'asse Z diretto lungo la verticale (fig. 48). La funzione di Lagrange della trottola nel campo di gravità è

$$L = \frac{I_1 + \mu l^2}{2} (\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \operatorname{sen}^2 \theta) + \frac{I_3}{2} (\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta)^2 - \mu g l \cos \theta$$

(μ è la massa della trottola, l la distanza del punto inferiore dal centro di massa).

Le coordinate ψ e φ sono cicliche. Abbiamo quindi due integrali del moto:

$$p_\psi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = I_3 (\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta) = \text{costante} \equiv M_3, \tag{1}$$

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = (I_1' \operatorname{sen}^2 \theta + I_3 \cos^2 \theta) \dot{\varphi} + I_3 \dot{\psi} \cos \theta = \text{costante} \equiv M_z, \tag{2}$$

dove $I'_1 = I_1 + \mu l^2$ (le grandezze p_ψ e p_φ sono le componenti del momento rotazionale definito relativamente al punto O lungo gli assi x_3 e Z, rispettivamente). Inoltre, l'energia

$$E = \frac{I_1'}{2} (\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \operatorname{sen}^2 \theta) + \frac{I_3}{2} (\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta)^2 + \mu g l \cos \theta. \tag{3}$$

si conserva.

Dalle equazioni (1) e (2) ricaviamo:

$$\dot{\varphi} = \frac{M_z - M_3 \cos \theta}{I_1' \operatorname{sen}^2 \theta}, \tag{4}$$

$$\dot{\psi} = \frac{M_3}{I_3} - \cos \theta \, \frac{M_z - M_3 \cos \theta}{I_1' \operatorname{sen}^2 \theta}. \tag{5}$$

Eliminando con queste uguaglianze $\dot{\varphi}$ e $\dot{\psi}$ dall'energia (3), otteniamo:

$$E' = \frac{I_1'}{2} \dot{\theta}^2 + U_{\text{eff}} (\theta),$$

dove

$$E' = E - \frac{M_3^2}{2I_3} - \mu g l, \qquad U_{\text{eff}}(\theta) = \frac{(M_z - M_3 \cos\theta)^2}{2I_1' \operatorname{sen}^2\theta} - \mu g l (1 - \cos\theta). \tag{6}$$

Da cui, ricavando $\dot{\theta}$ e separando le variabili, si ottiene:

$$t = \int \frac{d\theta}{\sqrt{\frac{2}{I_1'}(E' - U_{\text{eff}}(\theta))}} \tag{7}$$

(è un integrale ellittico). Gli angoli ψ e φ si esprimono poi come funzioni di θ in forma di quadrature mediante le equazioni (4) e (5).

La regione di variazione dell'angolo θ nel corso del moto è definita dalla condizione $E' \geqslant U_{\text{eff}}(\theta)$. La funzione $U_{\text{eff}}(\theta)$ (per $M_3 \neq M_z$) tende a $+\infty$

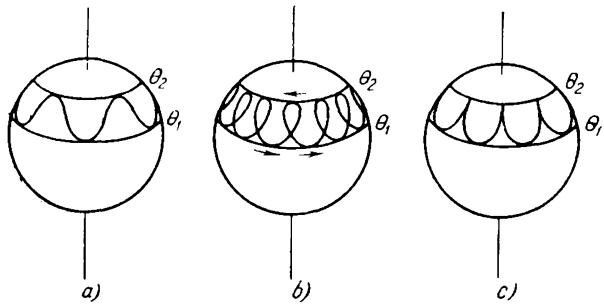


Fig. 49

per i valori $\theta = 0$ e $\theta = \pi$ e passa per un minimo nell'intervallo compreso tra questi due valori. L'equazione $E' = U_{\text{eff}}(\theta)$ ha quindi due radici che danno gli angoli limite θ_1 e θ_2 d'inclinazione dell'asse della trottola rispetto alla verticale.

Al variare dell'angolo θ fra θ_1 e θ_2, il segno della derivata $\dot{\varphi}$ cambia o no secondo che cambia o no, in questo intervallo, il segno della differenza $M_z - M_3 \cos\theta$. Nel secondo caso l'asse della trottola precede monotonamente intorno alla verticale, effettuando contemporaneamente oscillazioni alto-basso (ossia la cosiddetta *nutazione*; vedi la fig. 49,*a*, dove la linea ondulata rappresenta la traccia che l'asse della trottola lascerebbe sulla superficie di una sfera avente per centro il punto fisso della trottola). Nel primo caso la direzione della precessione è opposta sui due cerchi limite, in modo che l'asse della trottola si sposta attorno alla verticale descrivendo nodi (fig. 49,*b*). Infine, se uno dei valori θ_1, θ_2 coincide con lo zero della differenza $M_z - M_3 \cos\theta$, sul cerchio limite corrispondente $\dot{\varphi}$ e $\dot{\theta}$ si annullano contemporaneamente, cosicché l'asse della trottola descrive una traiettoria della forma rappresentata nella fig. 49,*c*.

2. Trovare la condizione per cui la rotazione della trottola intorno all'asse verticale è stabile.

Soluzione. Poiché per $\theta = 0$ gli assi x_3 e Z coincidono, abbiamo $M_3 = M_z$, $E' = 0$. La rotazione intorno a questo asse sarà stabile se il valore $\theta = 0$ corrisponde al minimo della funzione $U_{\text{eff}}(\theta)$. Per valori piccoli di θ si ha:

$$U_{\text{eff}} \approx \left(\frac{M_3^2}{8I_1'} - \frac{\mu g l}{2}\right)\theta^2,$$

da cui ricaviamo la condizione $M_3^2 > 4I_1'\mu gl$, ossia

$$\Omega_3^2 > \frac{4I_1'\mu gl}{I_3^2}.$$

3. Determinare il moto di una trottola nel caso in cui l'energia cinetica della sua rotazione propria sia grande rispetto all'energia nel campo di gravità (la cosiddetta trottola « veloce »).

Soluzione. In prima approssimazione, se si trascura il campo di gravità, si produce una precessione libera dell'asse della trottola intorno alla direzione del momento **M** (corrispondente nel nostro caso alla nutazione della trottola); questa precessione avviene, conformemente alla (33,5), con velocità angolare

$$\Omega_{\text{nut}} = \frac{\mathbf{M}}{I_1'}. \qquad (1)$$

In seconda approssimazione, appare una lenta precessione del momento **M** intorno alla verticale (fig. 50). Per determinare la velocità di questa precessione lenta, calcoliamo la media dell'equazione esatta del moto (34,3) per un periodo della nutazione

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = \mathbf{K}.$$

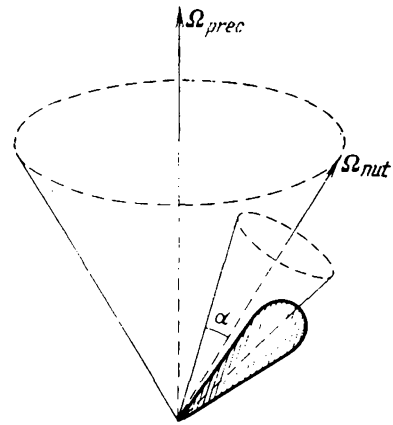


Fig. 50

Il momento delle forze di gravità agenti sulla trottola è $\mathbf{K} = \mu l\,[\mathbf{n}_3\mathbf{g}]$, dove $\mathbf{n}_3$ è un versore diretto come l'asse della trottola. Da considerazioni di simmetria è evidente che il calcolo della media **K** su un « cono di nutazione » si riduce alla sostituzione del vettore $\mathbf{n}_3$ con la sua proiezione $\cos\alpha \cdot \mathbf{M}/M$ sulla direzione di **M** essendo α l'angolo tra **M** e l'asse della trottola). Si ottiene quindi l'equazione

$$\overline{\frac{d\mathbf{M}}{dt}} = -\cos\alpha\,\frac{\mu l}{M}\,[\mathbf{gM}].$$

Essa mostra che il vettore **M** subisce una precessione intorno alla direzione di **g** (verticale) con velocità angolare media

$$\overline{\Omega}_{\text{pr}} = -\frac{\mu l \cos\alpha}{M}\,\mathbf{g} \qquad (2)$$

(piccola in confronto a Ω_{nut}).

Nell'approssimazione considerata, le grandezze M e $\cos\alpha$ facenti parte delle formule (1) e (2) sono costanti (benché non siano, a termine di rigore, integrali del moto). Esse sono legate, con la stessa approssimazione, alle grandezze strettamente conservative E ed M_3 dalle relazioni

$$M_3 = M\cos\alpha,$$

$$E \approx \frac{M^2}{2}\left(\frac{\cos^2\alpha}{I_3} + \frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{I_1'}\right).$$

§ 36. *Equazioni di Eulero*

Le equazioni del moto scritte nel § 34 si riferiscono a un sistema di coordinate immobile: le derivate $d\mathbf{P}/dt$ e $d\mathbf{M}/dt$ nelle equazioni (34,1) e (34,3) rappresentano le variazioni dei vettori **P** ed **M** rispetto a questo sistema. Esiste però un sistema mobile, con gli assi coordinati diretti lungo gli assi principali d'inerzia, nel quale ha luogo una relazione molto semplice tra le componenti del momento rotazionale **M** del solido e quelle della velocità angolare. Per poter utilizzare questa relazione è necessario scrivere preliminarmente le equazioni del moto in un sistema mobile di coordinate x_1, x_2, x_3.

Sia $d\mathbf{A}/dt$ la variazione istantanea di un vettore **A** rispetto al sistema di coordinate immobile. Se in un sistema rotante il vettore **A** non cambia, la sua variazione rispetto al sistema immobile è generata unicamente dalla rotazione; si ha dunque

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = [\mathbf{\Omega A}]$$

(vedi § 9 dove abbiamo dimostrato che le formule del tipo (9,1) e (9,2) sono valide per qualsiasi vettore). Nel caso generale, al secondo membro di questa uguaglianza bisogna aggiungere la variazione istantanea del vettore **A** rispetto al sistema mobile; indicando questa variazione con $d'\mathbf{A}/dt$, si ottiene:

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{d'\mathbf{A}}{dt} + [\mathbf{\Omega A}]. \tag{36,1}$$

Questa formula ci permette immediatamente di scrivere le equazioni (34,1) e (34,3) nella forma

$$\frac{d'\mathbf{P}}{dt} + [\mathbf{\Omega P}] = \mathbf{F}, \quad \frac{d'\mathbf{M}}{dt} + [\mathbf{\Omega M}] = \mathbf{K}. \tag{36,2}$$

Poiché la derivazione rispetto al tempo è fatta qui nel sistema di coordinate mobile, possiamo proiettare direttamente le equazioni sugli assi di questo sistema scrivendo

$$\left(\frac{d'\mathbf{P}}{dt}\right)_1 = \frac{dP_1}{dt}, \ldots, \left(\frac{d'\mathbf{M}}{dt}\right)_1 = \frac{dM_1}{dt}, \ldots,$$

dove gli indici 1, 2, 3 esprimono le componenti rispetto agli assi x_1, x_2, x_3. Sostituendo poi **P** con $\mu\mathbf{V}$, otteniamo:

$$\begin{aligned} \mu\left(\frac{dV_1}{dt} + \Omega_2 V_3 - \Omega_3 V_2\right) &= F_1, \\ \mu\left(\frac{dV_2}{dt} + \Omega_3 V_1 - \Omega_1 V_3\right) &= F_2, \\ \mu\left(\frac{dV_3}{dt} + \Omega_1 V_2 - \Omega_2 V_1\right) &= F_3. \end{aligned} \tag{36,3}$$

Partendo dall'ipotesi che gli assi scelti x_1, x_2, x_3 coincidano con gli assi principali d'inerzia e ponendo nella seconda delle equazioni (36,2) $M_1 = I_1\Omega_1$, ecc., otteniamo:

$$\begin{aligned} I_1 \frac{d\Omega_1}{dt} + (I_3 - I_2)\,\Omega_2\Omega_3 &= K_1, \\ I_2 \frac{d\Omega_2}{dt} + (I_1 - I_3)\,\Omega_3\Omega_1 &= K_2, \\ I_3 \frac{d\Omega_3}{dt} + (I_2 - I_1)\,\Omega_1\Omega_2 &= K_3. \end{aligned} \tag{36,4}$$

Le equazioni (36,4) si chiamano *equazioni di Eulero.*

Per la rotazione libera, $\mathbf{K} = 0$, cosicché le equazioni di Eulero assumono la forma

$$\begin{aligned} \frac{d\Omega_1}{dt} + \frac{I_3 - I_2}{I_1}\,\Omega_2\Omega_3 &= 0, \\ \frac{d\Omega_2}{dt} + \frac{I_1 - I_3}{I_2}\,\Omega_3\Omega_1 &= 0, \\ \frac{d\Omega_3}{dt} + \frac{I_2 - I_1}{I_3}\,\Omega_1\Omega_2 &= 0. \end{aligned} \tag{36,5}$$

Applichiamo, a titolo d'esempio, queste equazioni alla rotazione libera, che già abbiamo considerato sopra, di una trottola simmetrica. Posto $I_1 = I_2$, abbiamo dalla terza equazione $\dot{\Omega}_3 = 0$, cioè $\Omega_3 =$ costante. Scriviamo poi le prime due equazioni nella forma

$$\dot{\Omega}_1 = -\omega\Omega_2, \quad \dot{\Omega}_2 = \omega\Omega_1,$$

dove

$$\omega = \Omega_3 \frac{I_3 - I_1}{I_1} \tag{36,6}$$

è una grandezza costante. Moltiplicando la seconda equazione per i e sommandola alla prima, otteniamo:

$$\frac{d}{dt}(\Omega_1 + i\Omega_2) = i\omega\,(\Omega_1 + i\Omega_2),$$

da cui

$$\Omega_1 + i\Omega_2 = Ae^{i\omega t},$$

dove A è una costante che si può considerare reale (con una scelta adeguata dell'origine dei tempi); abbiamo allora

$$\Omega_1 = A\cos\omega t, \quad \Omega_2 = A\,\mathrm{sen}\,\omega t. \tag{36,7}$$

Questo risultato mostra che la proiezione della velocità angolare su un piano perpendicolare all'asse della trottola ruota in questo piano con una velocità angolare ω, restando però costante in grandezza ($\sqrt{\Omega_1^2 + \Omega_2^2} = A$). Poiché anche la proiezione Ω_3 sull'asse della trottola resta costante, concludiamo che tutto il vettore $\mathbf{\Omega}$

deve ruotare uniformemente intorno all'asse della trottola con una velocità angolare ω, mantenendo però costante la sua grandezza. Tenendo presente che le componenti dei vettori $\mathbf{\Omega}$ ed $\mathbf{M}$ sono legate dalle relazioni $M_1 = I_1\Omega_1$, $M_2 = I_2\Omega_2$, $M_3 = I_3\Omega_3$, è evidente che anche il vettore momento $\mathbf{M}$ è animato dallo stesso moto (rispetto all'asse della trottola).

Il risultato ottenuto non è che un altro aspetto del moto della trottola, già studiato nei §§ 33 e 35, rispetto ad un sistema di coordinate immobile. In particolare, la velocità angolare di rotazione del vettore $\mathbf{M}$ (asse Z nella fig. 48) intorno alla direzione x_3 coincide, in termini degli angoli di Eulero, con la velocità angolare $-\dot{\psi}$. Le equazioni (35,4) ci danno:

$$\dot{\psi} = \frac{M\cos\theta}{I_3} - \dot{\varphi}\cos\theta = M\cos\theta\left(\frac{1}{I_3} - \frac{1}{I_1}\right)$$

ossia

$$-\dot{\psi} = \Omega_3\,\frac{I_3 - I_1}{I_1},$$

il che concorde con la (36,6).

§ 37. *Trottola asimmetrica*

Applichiamo le equazioni di Eulero al problema piú complesso della rotazione libera di una trottola asimmetrica i cui tre momenti d'inerzia sono tutti differenti. Per fissare le idee supponiamo

$$I_3 > I_2 > I_1. \tag{37,1}$$

Due integrali delle equazioni di Eulero sono noti a priori. Essi esprimono le leggi di conservazione dell'energia e del momento e sono dati dalle uguaglianze

$$\begin{aligned} I_1\Omega_1^2 + I_2\Omega_2^2 + I_3\Omega_3^2 &= 2E, \\ I_1^2\Omega_1^2 + I_2^2\Omega_2^2 + I_3^2\Omega_3^2 &= M^2, \end{aligned} \tag{37,2}$$

dove l'energia E e il valore assoluto M del momento sono costanti date. Queste stesse uguaglianze, espresse mediante le componenti del vettore $\mathbf{M}$, assumono la forma

$$\frac{M_1^2}{I_1} + \frac{M_2^2}{I_2} + \frac{M_3^2}{I_3} = 2E, \tag{37,3}$$

$$M_1^2 + M_2^2 + M_3^2 = M^2. \tag{37,4}$$

Da queste relazioni si può già trarre qualche conclusione sul carattere del moto della trottola. Osserviamo a questo proposito che geometricamente le equazioni (37,3) e (37,4) si presentano, rispetto agli

assi M_1, M_2, M_3, rispettivamente, come equazioni della superficie di un ellissoide di semiassi

$$\sqrt{2EI_1},\ \sqrt{2EI_2},\ \sqrt{2EI_3}$$

e di una superficie sferica di raggio M. Al variare del vettore **M** (rispetto agli assi d'inerzia della trottola) il suo estremo si muove lungo la linea d'intersezione delle superfici indicate sopra (la figura 51

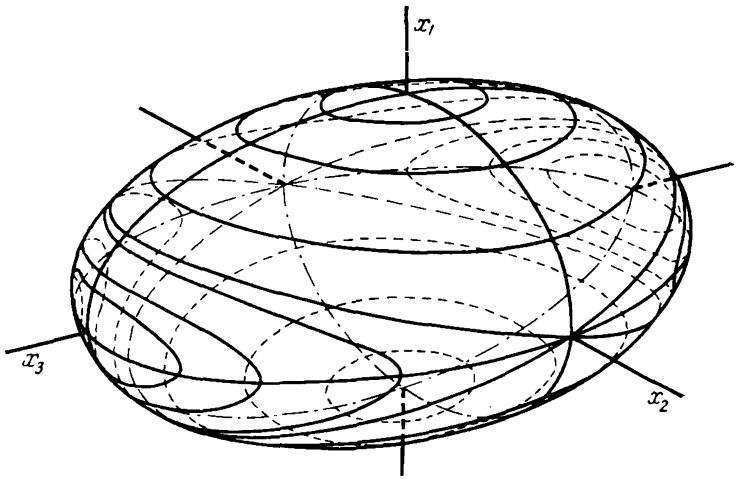


Fig. 51

rappresenta un certo numero di linee di intersezione di un ellissoide con sfere di diverso raggio). L'esistenza stessa dell'intersezione è assicurata dalle ovvie disuguaglianze

$$2EI_1 < M^2 < 2EI_3, \tag{37,5}$$

le quali geometricamente significano che il raggio della sfera (37,4) è compreso tra il minore e il maggiore dei semiassi dell'ellissoide (37,3).

Vediamo ora come variano queste « traiettorie » descritte dell'estremo del vettore **M**[1]) a mano a mano che cambia la grandezza M (per un'energia E data). Quando M^2 è leggermente maggiore di $2EI_1$, la sfera interseca l'ellissoide lungo due piccole curve chiuse che abbracciano l'asse x_1 in prossimità dei due poli corrispondenti dell'ellissoide (quando $M^2 \to 2EI_1$, queste curve si riducono a punti coincidenti con i poli). Al crescere di M^2, le curve si allargano e per $M^2 = 2EI_2$ si trasformano in due curve piane (ellissi) che si intersecano nei poli sull'asse x_2 dell'ellissoide. Crescendo ulteriormente

[1]) Le curve analoghe descritte dall'estremo del vettore Ω si chiamano *polodie*.

M^2, compaiono nuovamente due traiettorie chiuse distinte, ma che circondano questa volta i poli sull'asse x_3; esse si riducono a questi due punti quando $M^2 \to 2EI_3$.

Osserviamo innanzitutto che il fatto che le traiettorie siano chiuse significa periodicità della variazione del vettore **M** rispetto al corpo della trottola; in un periodo il vettore **M** descrive una superficie conica, tornando alla posizione di partenza.

Osserviamo inoltre il carattere sostanzialmente diverso delle traiettorie vicine ai diversi poli dell'ellissoide. In prossimità degli assi x_1 ed x_3 le traiettorie sono disposte interamente intorno ai poli, mentre quelle, passanti in prossimità dei poli sull'asse x_2, si allontanano a distanze sempre maggiori da questi punti. Questa differenza è dovuta alla differente stabilità della rotazione della trottola intorno ai suoi tre assi d'inerzia. La rotazione intorno agli assi x_1 ed x_3 (corrispondenti al maggiore e al minore dei tre momenti d'inerzia della trottola) è stabile nel senso che, per un piccolo spostamento da questi stati, la trottola continuerà a compiere un moto vicino a quello iniziale. Al contrario, la rotazione intorno all'asse x_2 è instabile; sarà cioè sufficiente un piccolo spostamento per provocare un moto che porti la trottola lontano dalla sua posizione iniziale.

Per determinare la relazione tra le componenti di $\mathbf{\Omega}$ (o quelle di **M** che sono ad esse proporzionali) e il tempo, usiamo le equazioni d'Eulero (36,5). Esprimiamo Ω_1 e Ω_3 in funzione di Ω_2 con l'aiuto delle due equazioni (37,2) e (37,3)

$$\Omega_1^2 = \frac{1}{I_1(I_3-I_1)}\{(2EI_3-M^2)-I_2(I_3-I_2)\Omega_2^2\},$$

$$\Omega_3^2 = \frac{1}{I_3(I_3-I_1)}\{(M^2-2EI_1)-I_2(I_2-I_1)\Omega_2^2\} \qquad (37,6)$$

e, sostituendo nella seconda delle equazioni (36,5), troviamo:

$$\frac{d\Omega_2}{dt} = \frac{I_3-I_1}{I_2}\Omega_1\Omega_3 =$$

$$= \frac{1}{I_2\sqrt{I_1I_3}}\{[(2EI_3-M^2)-I_2(I_3-I_2)\Omega_2^2][(M^2-2EI_1)-$$

$$-I_2(I_2-I_1)\Omega_2^2]\}^{1/2}. \qquad (37,7)$$

Separando le variabili in questa equazione ed integrando, otteniamo una funzione $t(\Omega_2)$ in forma di un integrale ellittico. Per ridurre quest'ultimo alla forma tipica, poniamo, per fissare le idee.

$$M^2 > 2EI_2$$

(in caso contrario bisogna scambiare gli indici 1 e 3 in tutte le formule che seguono). Introducendo al posto di t e Ω_2 le nuove variabili

$$\tau = t\sqrt{\frac{(I_3-I_2)(M^2-2EI_1)}{I_1I_2I_3}}, \qquad s = \Omega_2\sqrt{\frac{I_2(I_3-I_2)}{2EI_3-M^2}} \qquad (37,8)$$

e il parametro positivo $k^2 < 1$ dato da

$$k^2 = \frac{(I_2 - I_1)(2EI_3 - M^2)}{(I_3 - I_2)(M^2 - 2EI_1)}, \tag{37,9}$$

otteniamo:

$$\tau = \int_0^s \frac{ds}{\sqrt{(1-s^2)(1-k^2s^2)}}$$

(è opportuno scegliere l'origine dei tempi in modo tale che $\Omega_2 = 0$). Invertendo questo integrale, si ottiene, com'è noto, una delle funzioni ellittiche di Jacobi:

$$s = \operatorname{sn} \tau,$$

che determina appunto la dipendenza di Ω_2 dal tempo. Le funzioni $\Omega_1(t)$ ed $\Omega_3(t)$ si esprimono algebricamente mediante $\Omega_2(t)$ secondo le uguaglianze (37,6). Prendendo in considerazione la definizione delle altre due funzioni ellittiche

$$\operatorname{cn} \tau = \sqrt{1 - \operatorname{sn}^2\tau}, \quad \operatorname{dn} \tau = \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sn}^2\tau},$$

otteniamo infine le seguenti formule:

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= \sqrt{\frac{2EI_3 - M^2}{I_1(I_3 - I_1)}} \operatorname{cn} \tau, \\ \Omega_2 &= \sqrt{\frac{2EI_3 - M^2}{I_2(I_3 - I_2)}} \operatorname{sn} \tau, \\ \Omega_3 &= \sqrt{\frac{M^2 - 2EI_1}{I_3(I_3 - I_1)}} \operatorname{dn} \tau. \end{aligned} \tag{37,10}$$

Le funzioni (37,10) sono periodiche; il loro periodo rispetto alla variabile τ è uguale, com'è noto, alla grandezza $4K$, dove K è l'integrale ellittico completo di prima specie:

$$K = \int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{(1-s^2)(1-k^2s^2)}} = \int_0^{\pi/2} \frac{du}{\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 u}}. \tag{37,11}$$

Il periodo rispetto al tempo viene dunque dato dall'espressione

$$T = 4K \sqrt{\frac{I_1 I_2 I_3}{(I_3 - I_2)(M^2 - 2EI_1)}}. \tag{37,12}$$

In capo a questo intervallo di tempo il vettore $\mathbf{\Omega}$ torna alla sua posizione iniziale rispetto all'asse della trottola. (La trottola però non torna affatto alla sua posizione iniziale rispetto al sistema di coordinate immobile; vedi piú avanti).

Per $I_1 = I_2$ le formule (37,10) coincidono evidentemente con le formule ottenute nel paragrafo precedente per la trottola simmetrica. Infatti, per $I_1 \to I_2$ il parametro $k^2 \to 0$ e le funzioni ellittiche dege-

nerano in funzioni circolari

$$\operatorname{sn}\tau \to \operatorname{sen}\tau, \quad \operatorname{cn}\tau \to \cos\tau, \quad \operatorname{dn}\tau \to 1,$$

e ritrovano le formule (36,7).

Per $M^2 = 2EI_3$ si ha: $\Omega_1 = \Omega_2 = 0$, $\Omega_3 =$ costante, cioè il vettore $\mathbf{\Omega}$ è costantemente diretto lungo l'asse d'inerzia x_3; questo caso corrisponde ad una rotazione uniforme della trottola intorno all'asse x_3. Analogamente, per $M^2 = 2EI_1$ (quando $\tau \equiv 0$) si ha una rotazione uniforme intorno all'asse x_1.

Determiniamo ora il moto assoluto della trottola nello spazio in funzione del tempo (assoluto rispetto al sistema immobile di coordinate X, Y, Z). Introduciamo a questo scopo gli angoli d'Eulero ψ, φ, θ tra gli assi della trottola x_1, x_2, x_3 e gli assi X, Y, Z, facendo coincidere l'asse fisso Z con la direzione del vettore costante $\mathbf{M}$. Poiché l'angolo polare e l'azimut della direzione di Z rispetto agli assi x_1, x_2, x_3 sono uguali a θ e $\frac{\pi}{2} - \psi$, rispettivamente (vedi nota alla pag. 167), proiettando il vettore $\mathbf{M}$ sugli assi x_1, x_2, x_3 si ottiene:

$$\begin{aligned} M \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\psi &= M_1 = I_1\Omega_1, \\ M \operatorname{sen}\theta \cos\psi &= M_2 = I_2\Omega_2, \\ M \cos\theta &= M_3 = I_3\Omega_3. \end{aligned} \tag{37,13}$$

Di qui

$$\cos\theta = \frac{I_3\Omega_3}{M}, \qquad \operatorname{tg}\psi = \frac{I_1\Omega_1}{I_2\Omega_2}, \tag{37,14}$$

e, tenendo conto delle formule (37,10), troviamo:

$$\begin{aligned} \cos\theta &= \sqrt{\frac{I_3(M^2-2EI_1)}{M^2(I_3-I_1)}}\,\operatorname{dn}\tau, \\ \operatorname{tg}\psi &= \sqrt{\frac{I_1(I_3-I_2)}{I_2(I_3-I_1)}}\,\frac{\operatorname{cn}\tau}{\operatorname{sn}\tau}, \end{aligned} \tag{37,15}$$

Queste relazioni determinano la dipendenza dal tempo degli angoli θ e ψ che sono, con le componenti del vettore $\mathbf{\Omega}$, funzioni periodiche con periodo dato dalla (37,12).

L'angolo φ non entra nelle formule (37,13); per calcolarlo, bisogna ricorrere alle formule (35,1) che esprimono le componenti di $\mathbf{\Omega}$ attraverso le derivate degli angoli euleriani rispetto al tempo. Eliminando $\dot\theta$ dalle uguaglianze

$$\Omega_1 = \dot\varphi \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\psi + \dot\theta\cos\psi,$$

$$\Omega_2 = \dot\varphi \operatorname{sen}\theta \cos\psi - \dot\theta \operatorname{sen}\psi,$$

otteniamo:

$$\dot\varphi = \frac{\Omega_1 \operatorname{sen}\psi + \Omega_2\cos\psi}{\operatorname{sen}\theta},$$

utilizzando inoltre le formule (37,13), troviamo:

$$\frac{d\varphi}{dt} = M \frac{I_1\Omega_1^2 + I_2\Omega_2^2}{I_1^2\Omega_1^2 + I_2^2\Omega_2^2} . \tag{37,16}$$

In questo modo la funzione $\varphi(t)$ viene determinata da una quadratura, ma l'espressione integranda contiene funzioni ellittiche in forma complicata. Con una serie di trasformazioni abbastanza complicata questo integrale può essere espresso mediante le cosiddette «funzioni theta»; tralasciando tutti i calcoli, diamo qui solo il risultato finale [1]).

La funzione $\varphi(t)$ può essere rappresentata (a meno di una costante additiva arbitraria) sotto forma di una somma di due termini

$$\varphi(t) = \varphi_1(t) + \varphi_2(t), \tag{37,17}$$

uno dei quali è dato dalla formula

$$e^{2i\varphi_1(t)} = \frac{\vartheta_{01}\left(\frac{2t}{T} - i\alpha\right)}{\vartheta_{01}\left(\frac{2t}{T} + i\alpha\right)}, \tag{37,18}$$

dove ϑ_{01} è una funzione theta, ed α una costante reale definita dall'uguaglianza

$$\operatorname{sn}(i2\alpha K) = i\sqrt{\frac{I_3(M^2 - 2EI_1)}{I_1(2EI_3 - M^2)}} \tag{37,19}$$

[K e T sono dati dalle (37,11) e (37,12)]. La funzione nel secondo membro della (37,18) è periodica con un periodo uguale a $T/2$; quindi $\varphi_1(t)$ varia di 2π nell'inrervalo di tempo T. Il secondo termine della (37,17) è dato dalla formula

$$\varphi_2(t) = 2\pi\frac{t}{T'}, \quad \frac{1}{T'} = \frac{M}{2\pi I_1} - \frac{i}{\pi T}\frac{\vartheta_{01}'(i\alpha)}{\vartheta_{01}(i\alpha)} . \tag{37,20}$$

Questa funzione subisce un incremento di 2π nel tempo T'. Cosí il moto, per quanto riguarda l'angolo φ, rappresenta un insieme di due variazioni periodiche; uno dei periodi (T) coincide con il periodo di variazione degli angoli ψ e θ, e l'altro (T') è incommensurabile con il primo. Quest'ultima circostanza fa sí che la trottola durante il suo moto non torna alla sua posizione iniziale.

PROBLEMI

1. Determinare la rotazione libera di una trottola intorno ad un asse vicino all'asse d'inerzia x_3 (oppure x_1).

Soluzione. Supponiamo l'asse x_3 vicino alla direzione di M. Le componenti M_1 ed M_2 sono allora piccole e la componente $M_3 \approx M$ (a meno di infinitesimi

[1]) Per questi si può vedere E. T. Whittaker, *A Treatise on the Analitical Dynamics* (Dover, New York, 1944), cap. IV.

del primo ordine). Con la stessa approssimazione, le prime due equazioni di Eulero (36,5) si scrivono nella forma

$$\frac{dM_1}{dt}=\left(1-\frac{I_3}{I_2}\right)\Omega_0 M_2, \qquad \frac{dM_2}{dt}=\left(\frac{I_3}{I_1}-1\right)\Omega_0 M_1,$$

dove abbiamo introdotto la costante $\Omega_0 = M/I_3$. Seguendo la regola generale, cerchiamo per M_1 ed M_2 una soluzione proporzionale ad $e^{i\omega t}$, ed otteniamo per la frequenza ω il valore

$$\omega=\Omega_0\sqrt{\left(\frac{I_3}{I_1}-1\right)\left(\frac{I_3}{I_2}-1\right)}. \tag{1}$$

Per le grandezze M_1 ed M_2 otteniamo

$$M_1=Ma\sqrt{\frac{I_3}{I_2}-1}\cos\omega t, \qquad M_2=Ma\sqrt{\frac{I_3}{I_1}-1}\operatorname{sen}\omega t, \tag{2}$$

dove a è una costante arbitraria piccola. Queste formule determinano il moto del vettore **M** relativamente alla trottola; nella costruzione della fig. 51 l'estremo del vettore **M** descrive (con frequenza ω) una piccola ellisse intorno al polo giacente sull'asse x_3.

Per determinare il moto assoluto della trottola nello spazio, bisogna determinare gli angoli euleriani. Nel nostro caso, l'angolo d'inclinazione θ dell'asse x_3 sull'asse Z (direzione di **M**) è piccolo, e secondo le formule (37,14) abbiamo

$$\operatorname{tg}\psi=\frac{M_1}{M_2},$$

$$\theta^2\approx 2(1-\cos\theta)=2\left(1-\frac{M_3}{M}\right)\approx\frac{M_1^2+M_2^2}{M^2};$$

sostituendo la (2), troviamo

$$\operatorname{tg}\psi=\sqrt{\frac{I_1(I_3-I_2)}{I_2(I_3-I_1)}}\operatorname{ctg}\omega t,$$

$$\theta^2=a^2\left[\left(\frac{I_3}{I_2}-1\right)\cos^2\omega t+\left(\frac{I_3}{I_1}-1\right)\operatorname{sen}^2\omega t\right]. \tag{3}$$

Per calcolare l'angolo φ, notiamo che, secondo la terza delle formule (35,1) per $\theta \ll 1$ abbiamo:

$$\Omega_0\approx\Omega_3\approx\dot\psi+\dot\varphi.$$

Perciò

$$\varphi=\Omega_0 t-\psi \tag{4}$$

(la costante d'integrazione è omessa).

Per avere un'idea piú concreta del moto della trottola, bisogna osservare direttamente la variazione delle direzioni dei suoi tre assi d'inerzia (indichiamo con $\mathbf{n}_1$, $\mathbf{n}_2$, $\mathbf{n}_3$ i versori relativi a questi tre assi). I versori $\mathbf{n}_1$ ed $\mathbf{n}_2$ ruotano uniformemente con la frequenza Ω_0 nel piano XY, subendo nel frattempo piccole oscillazioni trasversali di frequenza ω; queste oscillazioni sono definite dalle componenti su Z dei versori in questione, per le quali abbiamo:

$$n_{1Z}\approx\frac{M_1}{M}=a\sqrt{\frac{I_3}{I_2}-1}\cos\omega t,$$

$$n_{2Z}\approx\frac{M_2}{M}=a\sqrt{\frac{I_3}{I_1}-1}\operatorname{sen}\omega t.$$

Per il versore $\mathbf{n}_3$ con la stessa approssimazione abbiamo:

$$n_{3x} \approx \theta \operatorname{sen} \varphi, \quad n_{3y} \approx -\theta \cos \varphi, \quad n_{3z} \approx 1$$

(l'angolo polare e l'azimut della direzione di $\mathbf{n}_3$ rispetto agli assi X, Y, Z sono uguali a θ e $\varphi - \frac{\pi}{2}$; vedi nota alla pag. 167). Utilizzando le formule (37,13) possiamo scrivere

$$n_{3x} = \theta \operatorname{sen}(\Omega_0 t - \psi) = \theta \operatorname{sen} \Omega_0 t \cos \psi - \theta \cos \Omega_0 t \operatorname{sen} \psi =$$

$$= \frac{M_2}{M} \operatorname{sen} \Omega_0 t - \frac{M_1}{M} \cos \Omega_0 t = a \sqrt{\frac{I_3}{I_1} - 1} \operatorname{sen} \Omega_0 t \operatorname{sen} \omega t -$$

$$- a \sqrt{\frac{I_3}{I_2} - 1} \cos \Omega_0 t \cos \omega t,$$

ossia

$$n_{3x} = -\frac{a}{2} \left(\sqrt{\frac{I_3}{I_1} - 1} + \sqrt{\frac{I_3}{I_2} - 1} \right) \cos(\Omega_0 + \omega) t +$$

$$+ \frac{a}{2} \left(\sqrt{\frac{I_3}{I_1} - 1} - \sqrt{\frac{I_3}{I_2} - 1} \right) \cos(\Omega_0 - \omega) t.$$

Analogamente troviamo:

$$n_{3y} = -\frac{a}{2} \left(\sqrt{\frac{I_3}{I_1} - 1} + \sqrt{\frac{I_3}{I_2} - 1} \right) \operatorname{sen}(\Omega_0 + \omega) t +$$

$$+ \frac{a}{2} \left(\sqrt{\frac{I_3}{I_1} - 1} - \sqrt{\frac{I_3}{I_2} - 1} \right) \operatorname{sen}(\Omega_0 - \omega) t.$$

Dall'ultima formula si vede che il moto del versore $\mathbf{n}_3$ rappresenta una sovrapposizione di due rotazioni di frequenze $(\Omega_0 \pm \omega)$ intorno all'asse Z.

2. Determinare la rotazione libera di una trottola per $M^2 = 2EI_2$.

Soluzione. Nella costruzione della fig. 51, questo caso corrisponde allo spostamento dell'estremità del vettore $\mathbf{M}$ su una curva passante per un polo sull'asse x_2.

L'equazione (37,7) assume la forma

$$\frac{ds}{d\tau} = 1 - s^2, \quad \tau = t \sqrt{\frac{(I_2 - I_1)(I_3 - I_2)}{I_1 I_3}} \Omega_0, \quad s = \frac{\Omega_2}{\Omega_0},$$

dove abbiamo posto $\Omega_0 = M/I_2 = 2E/M$. Integrando questa equazione ed utilizzando poi le formule (37,6), otteniamo:

$$\Omega_1 = \Omega_0 \sqrt{\frac{I_2 (I_3 - I_2)}{I_1 (I_3 - I_1)}} \frac{1}{\operatorname{ch} \tau},$$

$$\Omega_2 = \Omega_0 \operatorname{th} \tau,$$

$$\Omega_3 = \Omega_0 \sqrt{\frac{I_2 (I_2 - I_1)}{I_3 (I_3 - I_1)}} \frac{1}{\operatorname{ch} \tau}.$$

Per descrivere il moto assoluto della trottola, introduciamo gli angoli euleriani, definendo θ come l'angolo formato dall'asse Z (direzione di $\mathbf{M}$) con l'asse d'inerzia x_2 della trottola (e non x_3 come nel testo). Nelle formule (37,14) e (37,16) che stabiliscono la relazione tra le componenti del vettore $\mathbf{\Omega}$ e gli angoli

di Eulero, bisogna eseguire la permutazione ciclica degli indici 123→312. Sostituendo poi in queste formule le espressioni (1), otteniamo:

$$\cos\theta = \operatorname{th}\tau, \quad \varphi = \Omega_0 t + \text{costante}, \quad \operatorname{tg}\psi = \sqrt{\frac{I_3(I_2 - I_1)}{I_1(I_3 - I_2)}}.$$

Dalle formule ottenute risulta che la direzione del vettore $\mathbf{\Omega}$ tende asintoticamente (per $t \to \infty$) verso l'asse x_2, il quale, a sua volta, tende asintoticamente verso l'asse fisso Z.

§ 38. *Contatto fra i corpi solidi*

Dalle equazioni del moto (34,1) e (34,3) risulta evidente che per determinare le *condizioni d'equilibrio* di un corpo solido è sufficiente annullare la forza totale e il momento totale delle forze agenti su di esso:

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \Sigma \mathbf{f} = 0, \\ \mathbf{K} &= \Sigma\, [\mathbf{rf}] = 0. \end{aligned} \tag{38,1}$$

La sommatoria è estesa a tutte le forze esterne applicate al corpo, ed $\mathbf{r}$ rappresenta i raggi vettori dei « punti d'applicazione » di queste forze; il punto (origine delle coordinate), relativamente al quale sono definiti i momenti, può essere scelto arbitrariamente: per $\mathbf{F} = 0$, il valore di $\mathbf{K}$ non dipende da questa scelta [cfr. (34,5)].

Considerando un sistema di corpi solidi in contatto gli uni con gli altri, si ha l'equilibrio quando le condizioni (38,1) sono soddisfatte per ciascun corpo separatamente. Fra le forze vanno incluse anche quelle agenti sul corpo dato da parte degli altri corpi in contatto con esso. I punti di applicazione di queste forze coincidono con i punti di contatto dei corpi e si chiamano *forze di reazione*. È evidente che per ciascuna coppia di corpi, le loro forze reciproche di reazione sono uguali in modulo ed opposte in direzione.

Nel caso generale, i moduli e le direzioni delle reazioni vengono determinati risolvendo il sistema di equazioni d'equilibrio (38,1), compatibile per tutti i corpi. In alcuni casi, però, la direzione delle forze di reazione è data dalle condizioni stesse del problema. Per esempio, se due corpi possono strisciare liberamente l'uno sulla superficie dell'altro, le loro forze di reazione sono dirette secondo la normale a questa superficie.

Se i corpi a contatto si muovono l'uno rispetto all'altro, oltre alle forze di reazione, compaiono anche forze di carattere dissipativo, ossia le *forze d'attrito*.

Per i corpi a contatto sono possibili i due tipi di moto: *strisciamento* e *rotolamento*. Nello strisciamento le reazioni sono perpendicolari alle superfici di contatto, mentre le forze d'attrito sono dirette secondo le tangenti a queste superfici.

Il puro rotolamento è caratterizzato dal fatto che nei punti di contatto manca moto relativo dei corpi; in altri termini, per il corpo rotolante è come se, in ogni istante, il punto di contatto fosse un punto fisso. Le direzioni delle forze di reazione sono in questo caso arbitrarie, cioè non sono necessariamente normali alle superfici di contatto. L'attrito, invece, nel rotolamento appare come una coppia supplementare che si oppone al rotolamento stesso.

Se nel caso dello strisciamento l'attrito è insignificante da poter essere completamente trascurato, le superfici dei corpi sono dette *perfettamente lisce*. Viceversa, se le proprietà della superficie ammettono solo un rotolamento puro dei corpi senza strisciamento, e nel rotolamento l'attrito può essere trascurato, le superfici sono dette *perfettamente ruvide*.

In entrambi i casi le forze d'attrito non figurano esplicitamente nel problema del moto dei corpi, e quindi il problema è puramente meccanico. Se invece le proprietà concrete dell'attrito assumono un'importanza sostanziale, il moto perde il carattere di un processo puramente meccanico (cfr. § 25).

Il fatto che i corpi siano a contatto diminuisce il numero dei loro gradi di libertà in confronto con quelli che avrebbero nel caso di moto libero. Studiando problemi di questo genere, abbiamo finora tenuto conto di questa circostanza introducendo coordinate direttamente corrispondenti al numero effettivo di gradi di libertà. Nel rotolamento dei corpi, però, tale scelta delle coordinate può risultare impossibile.

La condizione cui deve soddisfare il moto dei corpi nel rotolamento consiste nell'uguaglianza delle velocità dei punti di contatto (cosí, per un corpo rotolante su una superficie fissa, la velocità del punto di contatto deve essere uguale a zero). Nel caso generale questa condizione si esprime mediante *equazioni dei vincoli* del tipo

$$\sum_i c_{\alpha i}\dot{q}_i = 0, \tag{38,2}$$

dove $c_{\alpha i}$ sono funzioni delle sole coordinate (α è l'indice che enumera le equazioni dei vincoli). Se i primi membri delle uguaglianze non sono derivate totali rispetto al tempo di funzioni delle coordinate, queste equazioni non si possono integrare. In altri termini, non è possibile trasformarle in relazioni tra le sole coordinate, mediante le quali si potrebbe esprimere la posizione dei corpi con un minor numero di coordinate, in corrispondenza con il reale numero di gradi di libertà. Tali vincoli sono detti *anolonomi* (contrariamente ai vincoli detti *olonomi* che legano solo le coordinate del sistema).

Consideriamo, ad esempio, il rotolamento di una sfera su una superficie piana. Come al solito, indichiamo con $\mathbf{V}$ la velocità del moto traslatorio (velocità del centro della sfera), e con $\mathbf{\Omega}$ la velocità angolare della sua rotazione. La velocità del punto di contatto della sfera con il piano si ottiene ponendo $\mathbf{r} = -a\mathbf{n}$ nella formula generale

$\mathbf{v} = \mathbf{V} + [\mathbf{\Omega r}]$ (dove a è il raggio della sfera, $\mathbf{n}$ il vettore unitario della normale al piano di rotolamento nel punto di contatto). Il vincolo cercato è espresso dalla condizione di assenza di strisciamento nel punto di contatto, cioè è dato dall'equazione

$$\mathbf{V} - a\,[\mathbf{\Omega n}] = 0. \tag{38,3}$$

Questa equazione non è integrabile: sebbene la velocità $\mathbf{V}$ sia la derivata totale rispetto al tempo del raggio vettore del centro della sfera, la velocità angolare non è invece generalmente la derivata totale di una delle coordinate. In tal modo, il vincolo (38,3) è anolonomo[1]).

Poiché non è possibile utilizzare le equazioni dei vincoli anolonomi per ridurre il numero delle coordinate, si debbono inevitabilmente introdurre, se tali vincoli esistono, delle coordinate non tutte indipendenti. Per trovare le corrispondenti equazioni di Lagrange, ricorriamo al principio di minima azione.

La presenza di vincoli del tipo (38,2) impone determinate restrizioni ai possibili valori delle variazioni delle coordinate. Moltiplicando queste equazioni per δt, troviamo che le variazioni δq_i non sono indipendenti, bensí legate dalle relazioni

$$\sum_i c_{\alpha i}\delta q_i = 0. \tag{38,4}$$

Di questa circostanza occorre tener conto nel fare la variazione dell'azione. Secondo il metodo generale di Lagrange per trovare le condizioni di estremo, all'espressione integranda della variazione dell'azione

$$\delta S = \int \sum_i \delta q_i \left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) dt$$

bisogna aggiungere le equazioni (38,4) moltiplicate per i fattori indeterminati λ_α (funzioni delle coordinate), e porre quindi l'integrale uguale a zero. Considerando tutte le variazioni δq_i indipendenti si ottengono le equazioni

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \sum_\alpha \lambda_\alpha c_{\alpha i}. \tag{38,5}$$

Con le equazioni dei vincoli (38,2), esse costituiscono un sistema di equazioni completo rispetto alle incognite q_i e λ_α.

Nel metodo esposto le forze di reazione generalmente non intervengono; il contatto dei corpi è interamente descritto dalle equazioni dei vincoli. Tuttavia, per stabilire le equazioni del moto dei corpi a

[1]) Notiamo che per il rotolamento di un cilindro un tale vincolo sarebbe olonomo. In questo caso, l'asse di rotazione conserva una direzione costante nello spazio, e di conseguenza, $\Omega = d\varphi/dt$ è la derivata totale dell'angolo di rotazione φ del cilindro intorno al suo asse. La relazione (38,3) è allora integrabile e dà la relazione tra la coordinata del centro di massa e l'angolo φ.

contatto, esiste un altro metodo nel quale si introducono esplicitamente le forze di reazione. Secondo questo metodo (che costituisce il contenuto del *principio di D'Alembert*) per ciascuno dei corpi a contatto si scrivono le equazioni

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \sum \mathbf{f}, \quad \frac{d\mathbf{M}}{dt} = \sum [\mathbf{rf}], \tag{38,6}$$

dove nell'insieme delle forze **f** che agiscono sul corpo, sono comprese anche le forze di reazione; queste forze non sono note a priori e vengono determinate contemporaneamente con il moto del corpo, a soluzione delle equazioni ottenute. Questo metodo è ugualmente applicabile sia nel caso di vincoli olonomi che in quello di vincoli anolonomi.

PROBLEMI

1. Applicando il principio di D'Alembert, trovare le equazioni del moto di una sfera omogenea rotolante su un piano sotto l'azione di una forza esterna **F** e di un momento di forze **K**.

Soluzione. L'equazione dei vincoli (38,3) è data già nel testo. Introducendo la forza di reazione (che indichiamo con **R**), applicata nel punto di contatto della sfera con il piano, scriviamo le equazioni (38,6):

$$\mu \frac{d\mathbf{V}}{dt} = \mathbf{F} + \mathbf{R}, \tag{1}$$

$$I \frac{d\mathbf{\Omega}}{dt} = \mathbf{K} - a\,[\mathbf{nR}] \tag{2}$$

(qui è stato preso in considerazione che $\mathbf{P} = \mu\mathbf{V}$ e che per una trottola sferica $\mathbf{M} = I\mathbf{\Omega}$). Derivando l'equazione dei vincoli (38,3) rispetto al tempo, si ottiene:

$$\dot{\mathbf{V}} = a\,[\dot{\mathbf{\Omega}}\mathbf{n}].$$

Sostituendo questo valore nell'equazione (1) ed eliminando $\dot{\mathbf{\Omega}}$ con l'aiuto della (2), si trova l'equazione

$$\frac{I}{a\mu}(\mathbf{F} + \mathbf{R}) = [\mathbf{Kn}] - a\mathbf{R} + a\mathbf{n}\,(\mathbf{nR}),$$

che lega la forza di reazione con **F** e **K**. Passando alle componenti e ponendo $I = \frac{2}{5}\mu a^2$ (vedi problema 2,*b*, § 32), abbiamo:

$$R_x = \frac{5}{7a} K_y - \frac{2}{7} F_x, \quad R_y = -\frac{5}{7a} K_x - \frac{2}{7} F_y, \quad R_z = -F_z$$

(dove il piano x, y è stato scelto come piano di rotolamento). Infine, riportando queste espressioni nella (1), otteniamo le equazioni del moto che già contengono soltanto la forza esterna e il momento dati:

$$\frac{dV_x}{dt} = \frac{5}{7\mu}\left(F_x + \frac{K_y}{a}\right), \quad \frac{dV_y}{dt} = \frac{5}{7\mu}\left(F_y - \frac{K_x}{a}\right).$$

Le componenti Ω_x, Ω_y della velocità angolare si esprimono in funzione di V_x e V_y con l'aiuto dell'equazione dei vincoli (38,3), e per Ω_z si ha:

$$\frac{2}{5}\mu a^2 \frac{d\Omega_z}{dt} = K_z$$

[componente z dell'equazione (2)].

2. Un'asta omogenea BD di peso P e di lunghezza l è appoggiata ad una parete (fig. 52); la sua estremità inferiore B è tenuta dal filo AB. Determinare le reazioni degli appoggi e la tensione del filo.

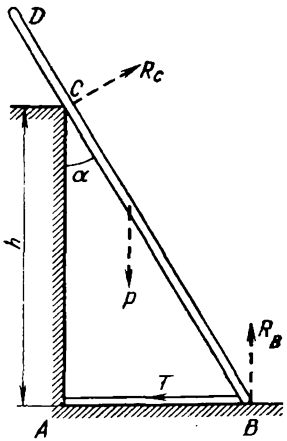


Fig. 52

Soluzione. Il peso dell'asta può essere rappresentato come una forza P applicata nel suo punto medio e diretta verticalmente verso il basso. Le forze di reazione R_B ed R_C sono dirette rispettivamente verso l'alto e perpendicolarmente all'asta; la tensione T del filo è diretta da B ad A. La soluzione delle equazioni d'equilibrio dà:

$$R_C = \frac{Pl}{4h} \operatorname{sen} 2\alpha, \quad R_B = P - R_C \operatorname{sen} \alpha,$$

$$T = R_C \cos \alpha.$$

3. Un'asta AB di peso P poggia le sue estremità su un piano orizzontale e su un piano verticale (fig. 53), ed è tenuta in questa posizione da due fili orizzontali AD e BC; il filo BC si trova nel piano verticale passante per l'asta AB. Determinare la reazione degli appoggi e le tensioni dei fili.

Soluzione. Le tensioni T_A e T_B dei fili sono dirette da A a D e da B a C. Le reazioni R_A ed R_B sono perpendicolari ai piani corrispondenti. La soluzione delle equazioni d'equilibrio dà:

$$R_B = P, \quad T_B = \frac{P}{2} \operatorname{ctg} \alpha, \quad R_A = T_B \operatorname{sen} \beta, \quad T_A = T_B \cos \beta.$$

4. Due aste di lunghezza l sono congiunte, in alto, a cerniera e sono collegate, in basso, da un filo AB (fig. 54). Nel punto di mezzo di una delle

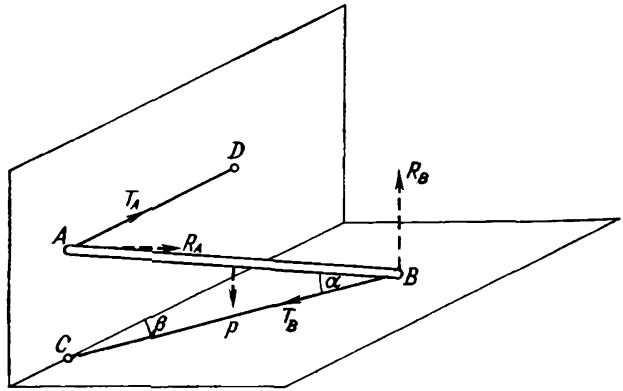


Fig. 53

aste è applicata una forza F (il peso delle sbarre è trascurato). Determinare le forze di reazione.

Soluzione. La tensione T del filo agisce nel punto A da A verso B, e nel punto B da B verso A. Le reazioni R_A ed R_B nei punti A e B sono

perpendicolari al piano d'appoggio. Indichiamo con $\mathbf{R}_C$ la forza di reazione agente sull'asta AC in corrispondenza della cerniera; sull'asta BC agisce allora una forza di reazione $-\mathbf{R}_C$. Annullando la somma dei momenti delle forze $\mathbf{R}_B$, T e $-\mathbf{R}_C$ agenti sull'asta BC troviamo che il vettore $\mathbf{R}_C$ risulta diretto lungo BC. Le altre condizioni d'equilibrio (per ciascuna delle aste) ci danno i valori

$$R_A = \frac{3}{4}F, \quad R_B = \frac{F}{4},$$

$$R_C = \frac{F}{4 \operatorname{sen} \alpha}, \quad T = \frac{1}{4} \operatorname{ctg} \alpha,$$

dove α è l'angolo CAB.

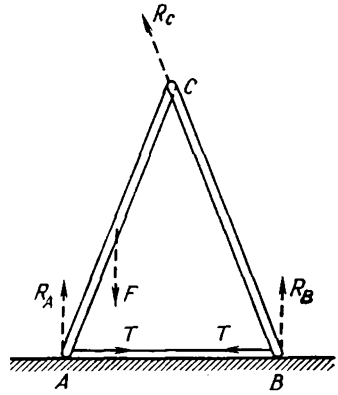


Fig. 54

§ 39. *Moto in un sistema di riferimento non inerziale*

Finora abbiamo studiato il moto di un sistema meccanico qualunque, relativamente sempre ad un sistema di riferimento inerziale. Soltanto in un sistema inerziale infatti la funzione di Lagrange, per esempio, di una particella in un campo esterno ha la forma

$$L_0 = \frac{m\mathbf{v}_0^2}{2} - U, \tag{39,1}$$

e l'equazione del moto si può scrivere:

$$m\frac{d\mathbf{v}_0}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}}$$

(in questo paragrafo indicheremo con l'indice 0 le grandezze riferite a un sistema inerziale).

Vediamo ora quale forma assumono le equazioni del moto di una particella in un sistema di riferimento non inerziale. Come punto di partenza per risolvere questo problema ricorreremo ancora al principio di minima azione, la cui applicabilità non è limitata in alcuno modo dalla scelta del sistema di riferimento; restano valide inoltre anche le equazioni di Lagrange

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}}. \tag{39,2}$$

Tuttavia, la funzione di Lagrange non ha piú la forma (39,1) e per trovarla è necessario eseguire sulla funzione L_0 una trasformazione appropriata.

Facciamo questa trasformazione in due tempi. Consideriamo in un primo momento un sistema di riferimento K', animato da un moto traslatorio con una velocità $\mathbf{V}(t)$ rispetto ad un sistema inerziale K_0. Le velocità $\mathbf{v}_0$ e $\mathbf{v}'$ di una particella relativamente ai sistemi K_0 e

K' sono legate dalla relazione

$$\mathbf{v}_0 = \mathbf{v}' + \mathbf{V}(t). \tag{39,3}$$

Sostituendo questa espressione nella (39,1), otteniamo la funzione di Lagrange nel sistema K':

$$L' = \frac{m\mathbf{v}'^2}{2} + m\mathbf{v}'\mathbf{V} + \frac{m}{2}\mathbf{V}^2 - U.$$

Poiché $V^2(t)$ è una data funzione del tempo, che puo essere rappresentata come la derivata totale rispetto a t di un'altra funzione, si può quindi nell'espressione ottenuta omettere il terzo termine. D'altra parte, $\mathbf{v}' = d\mathbf{r}'/dt$, dove $\mathbf{r}'$ è il raggio vettore della particella nel sistema di coordinate K'; si ha dunque

$$m\mathbf{V}(t)\,\mathbf{v}' = m\mathbf{V}\frac{d\mathbf{r}'}{dt} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{V}\mathbf{r}') - m\mathbf{r}'\frac{d\mathbf{V}}{dt}.$$

Sostituendo questo valore nella funzione di Lagrange ed omettendo nuovamente la derivata totale rispetto al tempo, si ottiene

$$L' = \frac{mv'^2}{2} - m\mathbf{W}(t)\,\mathbf{r}' - U, \tag{39,4}$$

dove $\mathbf{W} = d\mathbf{V}/dt$ è l'accelerazione del moto traslatorio del sistema K'.

Con la (39,4) otteniamo l'equazione di Lagrange

$$m\frac{d\mathbf{v}'}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}'} - m\mathbf{W}(t). \tag{39,5}$$

Si vede dunque che dal punto di vista della sua influenza sull'equazione del moto della particella, il moto traslatorio accelerato del sistema di riferimento è equivalente ad un campo di forze uniforme; la forza agente in questo campo è uguale al prodotto della massa della particella per l'accelerazione $\mathbf{W}$ e diretta in senso opposto a questa accelerazione.

Introduciamo ora un altro sistema di riferimento K avente l'origine in comune con K', ma animato, rispetto a quest'ultimo, da un moto rotazionale con una velocità angolare $\mathbf{\Omega}(t)$; rispetto al sistema inerziale K_0, il sistema K compie sia una rotazione che una traslazione.

La velocità $\mathbf{v}'$ della particella rispetto al sistema K' è composta della sua velocità $\mathbf{v}$ relativa al sistema K e della velocità $[\mathbf{\Omega}\mathbf{r}]$ della sua rotazione con il sistema K:

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v} + [\mathbf{\Omega}\mathbf{r}]$$

(i raggi vettori $\mathbf{r}$ ed $\mathbf{r}'$ della particella nei sistemi K e K' coincidono). Sostituendo questa espressione nella funzione di Lagrange (39,4), etteniamo:

$$L = \frac{mv^2}{2} + m\mathbf{v}\,[\mathbf{\Omega}\mathbf{r}] + \frac{m}{2}[\mathbf{\Omega}\mathbf{r}]^2 - m\mathbf{W}\mathbf{r} - U. \tag{39,6}$$

Questa è la forma generale della funzione di Lagrange della particella in un sistema di riferimento qualunque, non inerziale. Notiamo che la rotazione del sistema di riferimento introduce nella funzione di Lagrange un termine di tipo del tutto particolare, lineare rispetto alla velocità della particella.

Per calcolare le derivate facenti parte dell'equazione di Lagrange, scriviamo il differenziale totale:

$$dL = m\mathbf{v}\,d\mathbf{v} + m\,d\mathbf{v}\,[\mathbf{\Omega r}] + m\mathbf{v}\,[\mathbf{\Omega}\,d\mathbf{r}] + m\,[\mathbf{\Omega r}]\,[\mathbf{\Omega}\,d\mathbf{r}] -$$
$$- m\mathbf{W}\,d\mathbf{r} - \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}}\,d\mathbf{r} = m\mathbf{v}\,d\mathbf{v} + m\,d\mathbf{v}\,[\mathbf{\Omega r}] + m\,d\mathbf{r}\,[\mathbf{v\Omega}] +$$
$$+ m\,[[\mathbf{\Omega r}]\,\mathbf{\Omega}]\,d\mathbf{r} - m\mathbf{W}\,d\mathbf{r} - \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}}\,d\mathbf{r}.$$

Riunendo i termini contenenti $d\mathbf{v}$ e $d\mathbf{r}$, troviamo:

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = m\mathbf{v} + m\,[\mathbf{\Omega r}],$$

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} = m\,[\mathbf{v\Omega}] + m\,[[\mathbf{\Omega r}]\,\mathbf{\Omega}] - m\mathbf{W} - \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}}\,.$$

Sostituendo queste espressioni nella (39,2), troviamo l'equazione del moto cercata:

$$m\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}} - m\mathbf{W} + m\,[\mathbf{r}\dot{\mathbf{\Omega}}] + 2m\,[\mathbf{v\Omega}] + m\,[\mathbf{\Omega}\,[\mathbf{r\Omega}]]. \qquad (39,7)$$

Dall'equazione trovata si vede che le « forze d'inerzia » generate dalla rotazione del sistema di riferimento constano di tre termini. La forza $m\,[\mathbf{r}\dot{\mathbf{\Omega}}]$ è dovuta alla non uniformità della rotazione, mentre le altre due esistono anche nella rotazione uniforme. Si chiama $2\,m\,[\mathbf{v\Omega}]$ *forza di Coriolis*; a differenza di tutte le forze (non dissipative) che abbiamo esaminato finora, essa dipende dalla velocità della particella. La forza $m\,[\mathbf{\Omega}\,[\mathbf{r\Omega}]]$ è detta *centrifuga*. Essa giace nel piano definito da $\mathbf{r}$ ed $\mathbf{\Omega}$ ed è perpendicolare all'asse di rotazione (cioè alla direzione di $\mathbf{\Omega}$) diretta verso l'esterno; il valore della forza centrifuga è uguale a $m\rho\Omega^2$, dove ρ è la distanza della particella dall'asse di rotazione.

Consideriamo a parte il caso di un sistema di coordinate animato da una rotazione uniforme, senza moto traslatorio accelerato. Ponendo nella (39,6) e (39,7) $\mathbf{\Omega}$ = costante, $\mathbf{W} = 0$, otteniamo la funzione di Lagrange

$$L = \frac{mv^2}{2} + m\mathbf{v}\,[\mathbf{\Omega r}] + \frac{m}{2}\,[\mathbf{\Omega r}]^2 - U \qquad (39,8)$$

e l'equazione del moto

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}} + 2m\,[\mathbf{v\Omega}] + m\,[\mathbf{\Omega}\,[\mathbf{r\Omega}]]. \qquad (39,9)$$

Calcoliamo per questo caso anche l'energia della particella. Ponendo

$$\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = m\mathbf{v} + m\,[\mathbf{\Omega r}] \tag{39,10}$$

nell'uguaglianza $E = \mathbf{pv} - L$, otteniamo:

$$E = \frac{mv^2}{2} - \frac{m}{2}\,[\mathbf{\Omega r}]^2 + U. \tag{39,11}$$

Osserviamo che nell'espressione dell'energia non compare il termine lineare rispetto alla velocità. L'influenza della rotazione del sistema di riferimento si manifesta in un termine supplementare nell'energia, termine che dipende soltanto dalle coordinate della particella e che è proporzionale al quadrato della velocità angolare. Questa energia potenziale supplementare $-\frac{m}{2}\,[\mathbf{\Omega r}]^2$ è detta energia *centrifuga*.

La velocità $\mathbf{v}$ della particella rispetto al sistema di riferimento animato da una rotazione uniforme è legata alla sua velocità $\mathbf{v}_0$ rispetto al sistema inerziale K_0 dalla relazione:

$$\mathbf{v}_0 = \mathbf{v} + [\mathbf{\Omega r}] \tag{39,12}$$

da cui è evidente che l'impulso $\mathbf{p}$ (39,10) della particella nel sistema K coincide con il suo impulso $\mathbf{p}_0 = m\mathbf{v}_0$ nel sistema K_0. Coincidono anche i momenti angolari $\mathbf{M}_0 = [\mathbf{rp}_0]$ ed $\mathbf{M} = [\mathbf{rp}]$. Le energie della particella nei sistemi K e K_0 sono invece differenti. Sostituendo $\mathbf{v}$ dalla (39,12) nella (39,11), otteniamo:

$$E = \frac{mv_0^2}{2} - m\mathbf{v}_0\,[\mathbf{\Omega r}] + U = \frac{mv_0^2}{2} + U - m\,[\mathbf{rv}_0]\,\mathbf{\Omega}.$$

I primi due termini rappresentano l'energia E_0 nel sistema K_0. Introducendo nell'ultimo termine il momento angolare, avremo:

$$E = E_0 - \mathbf{M\Omega}. \tag{39,13}$$

Questa formula dà la legge di trasformazione dell'energia nel passaggio a un sistema di coordinate animato da una rotazione uniforme. Sebbene questa formula sia stata stabilita per una sola particella, è però evidente, che il procedimento, applicato al caso piú generale di un sistema qualsiasi di particelle, portà sempre alla formula (39,13).

PROBLEMI

1. Trovare la deviazione dalla verticale provocata dalla rotazione della Terra della libera caduta di un grave. (Considerare piccola la velocità angolare di rotazione).

Soluzione. Nel campo di gravità $U = -m\mathbf{gr}$, dove $\mathbf{g}$ è il vettore accelerazione della forza di gravità; trascurando nell'equazione (39,9) la forza centrifuga che contiene il quadrato di $\mathbf{\Omega}$, otteniamo l'equazione del moto nella.

forma

$$\dot{\mathbf{v}} = 2\,[\mathbf{v}\boldsymbol{\Omega}] + \mathbf{g}. \tag{1}$$

Risolviamo questa equazione per approssimazioni successive. Poniamo a tale scopo $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$, dove $\mathbf{v}_1$ è la soluzione dell'equazione $\dot{\mathbf{v}}_1 = \mathbf{g}$, cioè $\mathbf{v}_1 = \mathbf{g}t + \mathbf{v}_0$ ($\mathbf{v}_0$ velocità iniziale). Sostituendo $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ nella (1) e lasciando a destra soltanto $\mathbf{v}_1$, otteniamo per $\mathbf{v}_2$ l'equazione

$$\dot{\mathbf{v}}_2 = 2\,[\mathbf{v}_1\boldsymbol{\Omega}] = 2t\,[\mathbf{g}\boldsymbol{\Omega}] + 2\,[\mathbf{v}_0\boldsymbol{\Omega}].$$

L'integrazione dà:

$$\mathbf{r} = \mathbf{h} + \mathbf{v}_0 t + \frac{\mathbf{g}t^2}{2} + \frac{t^3}{3}\,[\mathbf{g}\boldsymbol{\Omega}] + t^2\,[\mathbf{v}_0\boldsymbol{\Omega}], \tag{2}$$

dove $\mathbf{h}$ è il vettore della posizione iniziale della particella.

Orientando l'asse z verticalmente verso l'alto e l'asse x lungo il meridiano verso il polo, si ha

$$g_x = g_y = 0,\quad g_z = -g;\quad \Omega_x = \Omega\cos\lambda,\quad \Omega_y = 0,\quad \Omega_z = \Omega\,\mathrm{sen}\,\lambda,$$

dove λ è la latitudine (nord, per fissare le idee). Ponendo nella (2) $\mathbf{v}_0 = 0$, troviamo

$$x = 0,\quad y = -\frac{t^3}{3}\,g\Omega\cos\lambda.$$

Sostituendo qui il tempo di caduta $t \approx \sqrt{2h/g}$, troviamo infine

$$x = 0,\quad y = -\frac{1}{3}\left(\frac{2h}{g}\right)^{3/2} g\Omega\cos\lambda$$

(il valore negativo per y corrisponde ad uno spostamento verso est).

2. Determinare la deviazione dal piano per un corpo lanciato dalla superficie della Terra con una velocità iniziale $\mathbf{v}_0$.

Soluzione. Scegliamo il piano xz in modo tale che esso contenga $\mathbf{v}_0$. L'altezza iniziale è $h = 0$. Per la deviazione laterale, l'equazione (2) del problema 1 ci dà

$$y = -\frac{t^3}{3}\,g\Omega_x + t^2\,(\Omega_x v_{0z} - \Omega_z v_{0x}),$$

ossia, sostituendo il tempo di ascesa $t \approx 2v_{0z}/g$:

$$y = \frac{4v_{0z}^2}{g^2}\left(\frac{1}{3}\,v_{0z}\Omega_x - v_{0x}\Omega_z\right).$$

3. Determinare l'effetto della rotazione della Terra sulle piccole oscillazioni di un pendolo (*pendolo di Foucault*).

Soluzione. Trascurando lo spostamento verticale del pendolo come infinitesimo del secondo ordine, si può considerare che il moto avvenga nel piano orizzontale xy. Omettendo i termini contenenti Ω^2, scriviamo le equazioni del moto nella forma

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 2\Omega_z\dot{y},\quad \ddot{y} + \omega^2 y = -2\Omega_z\dot{x},$$

dove ω è la frequenza delle oscillazioni del pendolo senza tener conto della rotazione della Terra. Moltiplicando la seconda equazione per i e sommando alla prima, otteniamo un'unica equazione

$$\ddot{\xi} + 2i\Omega_z\dot{\xi} + \omega^2\xi = 0$$

per la grandezza complessa $\xi = x + iy$. Per $\Omega_z \ll \omega$ la soluzione di questa equazione è:

$$\xi = e^{-i\Omega_z t}(A_1 e^{i\omega t} + A_2 e^{-i\omega t})$$

o

$$x + iy = e^{-i\Omega_z t}(x_0 + iy_0),$$

dove le funzioni $x_0(t)$ ed $y_0(t)$ danno la traiettoria del pendolo senza tener conto della rotazione della Terra. L'effetto di questa rotazione si riduce quindi a una rotazione della traiettoria intorno alla verticale con velocità angolare Ω_z.

Capitolo VII

EQUAZIONI CANONICHE

§ 40. *Equazioni di Hamilton*

La formulazione delle leggi della meccanica mediante la funzione di Lagrange (e delle equazioni di Lagrange che da essa possono essere dedotte) presuppone la descrizione dello stato meccanico di un sistema mediante l'assegnazione delle coordinate e delle velocità generalizzate. Questo metodo non è però l'unico possibile. La descrizione dello stato del sistema mediante le sue coordinate e i suoi impulsi generalizzati presenta, soprattutto nello studio di diversi problemi generali della meccanica, una serie di vantaggi. Sorge allora il problema della ricerca delle equazioni del moto che corrispondano a questa nuova formulazione della meccanica.

Il passaggio da un insieme di variabili indipendenti ad un altro può essere fatto mediante una trasformazione, nota in matematica sotto il nome di trasformazione di Legendre. Nel nostro caso questa trasformazione prende la forma seguente.

Il differenziale totale della funzione di Lagrange come funzione delle coordinate e delle velocità è

$$dL = \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i.$$

Questa espressione si può scrivere nella forma

$$dL = \sum \dot{p}_i \, dq_i + \sum p_i \, d\dot{q}_i, \tag{40,1}$$

essendo le derivate $dL/d\dot{q}_i$, per definizione, gli impulsi generalizzati, e le equazioni di Lagrange danno $dL/dq_i = \dot{p}_i$.

Riscrivendo ora il secondo termine della (40,1) nella forma

$$\sum p_i \, d\dot{q}_i = d\left(\sum p_i \dot{q}_i\right) - \sum \dot{q}_i \, dp_i,$$

portando poi il differenziale totale $d\left(\sum p_i \dot{q}_i\right)$ nel primo membro dell'uguaglianza e cambiando tutti i segni, dalla (40,1) otteniamo:

$$d\left(\sum p_i \dot{q}_i - L\right) = -\sum \dot{p}_i \, dq_i + \sum \dot{q}_i \, dp_i.$$

La grandezza sotto il segno di differenziale rappresenta l'energia del sistema (vedi § 6); espressa in funzione delle coordinate e degli

impulsi, essa si chiama *funzione di Hamilton* o *hamiltoniana* del sistema

$$H(p, q, t) = \sum_i p_i \dot{q}_i - L. \tag{40,2}$$

Dall'uguaglianza differenziale

$$dH = -\sum \dot{p}_i \, dq_i + \sum \dot{q}_i \, dp_i, \tag{40,3}$$

si ricavano le equazioni

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}. \tag{40,4}$$

Queste sono le equazioni del moto cercate: esse hanno per variabili p e q e sono dette *equazioni di Hamilton*. Esse formano un sistema di $2s$ equazioni differenziali del primo ordine per $2s$ funzioni incognite $p(t)$ e $q(t)$, che sostituiscono le s equazioni del secondo ordine ottenute con il metodo di Lagrange. Per la loro semplicità formale e la loro simmetria queste equazioni sono dette anche *canoniche*.

La derivata totale rispetto al tempo della funzione di Hamilton è

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} + \sum \frac{\partial H}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum \frac{\partial H}{\partial p_i} \dot{p}_i.$$

Sostituendovi $\dot{q}_i$ e $\dot{p}_i$ ricavate dalle equazioni (40,4), i due ultimi termini si elidono, cosicché

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t}. \tag{40,5}$$

Nel caso particolare in cui la funzione di Hamilton non dipende esplicitamente dal tempo, si ha $dH/dt = 0$, si ottiene cioè di nuovo la formulazione delle legge di conservazione dell'energia.

Le funzioni di Lagrange e di Hamilton, oltre alle variabili dinamiche q, $\dot{q}$ oppure q, p, contengono vari parametri, ossia grandezze che caratterizzano le proprietà del sistema meccanico come tale o del campo esterno agente su di esso. Sia λ uno di questi parametri. Se lo consideriamo come una variabile, avremo, in luogo della (40,1):

$$dL = \sum \dot{p}_i \, dq_i + \sum p_i \, d\dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \lambda} d\lambda,$$

quindi, in luogo della (40,3) otterremo:

$$dH = -\sum \dot{p}_i \, dq_i + \sum \dot{q}_i \, dp_i - \frac{\partial L}{\partial \lambda} d\lambda.$$

Di qui ricaviamo la relazione

$$\left(\frac{\partial H}{\partial \lambda}\right)_{p, q} = -\left(\frac{\partial L}{\partial \lambda}\right)_{\dot{q}, q}, \tag{40,6}$$

che lega fra di loro le derivate parziali rispetto al parametro λ delle funzioni di Lagrange e di Hamilton; gli indici stanno a significare che la derivazione va fatta in un caso tenendo costanti p e q, e nell'altro tenendo costanti q e $\dot{q}$.

Questo risultato può anche esser presentato sotto un altro aspetto. Sia $L = L_0 + L'$ la funzione di Lagrange, dove L' rappresenta una piccola correzione alla funzione fondamentale L_0. Il termine supplementare corrispondente nella funzione di Hamilton $H = H_0 + H'$ è legato con L' mediante

$$(H')_{p,\,q} = -(L')_{\dot{q},\,q}. \tag{40,7}$$

Notiamo che trasformando la (40,1) nella (40,3) abbiamo sempre omesso il termine in dt, il quale tiene conto di una possibile dipendenza esplicita della funzione di Lagrange dal tempo; infatti, questo termine avrebbe in quella connessione solo la funzione di un parametro, non avendo alcuna relazione con la trasformazione eseguita. Per analogia con la (40,6), le derivate parziali rispetto al tempo di L e di H sono legate dalla relazione

$$\left(\frac{\partial H}{\partial t}\right)_{p,\,q} = -\left(\frac{\partial L}{\partial t}\right)_{\dot{q},\,q}. \tag{40,8}$$

PROBLEMI

1. Trovare la funzione di Hamilton per un punto materiale in coordinate cartesiane, cilindriche e sferiche.

Risposta. In coordinate cartesiane x, y, z:

$$H = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + U(x, y, z).$$

In coordinate cilindriche r, φ, z:

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\varphi^2}{r^2} + p_z^2\right) + U(r, \varphi, z).$$

In coordinate sferiche r, θ, φ:

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\varphi^2}{r^2 \operatorname{sen}^2\theta}\right) + U(r, \theta, \varphi).$$

2. Trovare la funzione di Hamilton di una particella in un sistema di riferimento animato da un moto rotatorio uniforme.

Soluzione. Dalle (39,11) e (39,10) troviamo:

$$H = \frac{p^2}{2m} - \Omega\,[\mathbf{rp}] + U.$$

3. Trovare la funzione di Hamilton di un sistema costituito da una particella di massa M e da n particelle di massa m, senza tener conto del moto del centro di massa (vedi problema del § 13).

Soluzione. L'energia E si deduce dalla funzione di Lagrange trovata nel problema del § 13, cambiando il segno davanti ad U. Gli impulsi generalizzati

sono:

$$\mathbf{p}_a = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_a} = m\mathbf{v}_a - \frac{m^2}{\mu} \sum_a \mathbf{v}_a.$$

Da cui abbiamo:

$$\sum \mathbf{p}_a = m \sum \mathbf{v}_a - \frac{nm^2}{\mu} \sum \mathbf{v}_a = \frac{mM}{\mu} \sum \mathbf{v}_a,$$

$$\mathbf{v}_a = \frac{\mathbf{p}_a}{m} + \frac{1}{M} \sum \mathbf{p}_a.$$

Sostituendo questi valori nell'espressione di E, troviamo

$$H = \frac{1}{2m} \sum_a \mathbf{p}_a^2 + \frac{1}{2M} \left(\sum_a \mathbf{p}_a \right)^2 + U.$$

§ 41. *Funzione di Routh*

In alcuni casi, passando a nuove variabili, può risultare conveniente sostituire con impulsi non tutte le velocità generalizzate, ma soltanto alcune di esse. La trasformazione corrispondente è completamente analoga a quella operata nel paragrafo precedente.

Per semplificare la scrittura delle formule, supponiamo anzitutto di avere soltanto due coordinate, q e ξ, e trasformiamo le variabili q, ξ, $\dot{q}$, $\dot{\xi}$ nelle variabili $\dot{q}$, ξ, p, $\dot{\xi}$, dove p è l'impulso generalizzato corrispondente alla coordinata q.

Il differenziale della funzione di Lagrange $L(q, \xi, \dot{q}, \dot{\xi})$ è

$$dL = \frac{\partial L}{\partial q} dq + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} d\dot{q} + \frac{\partial L}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}} d\dot{\xi} =$$

$$= \dot{p}\, dq + p\, d\dot{q} + \frac{\partial L}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}} d\dot{\xi},$$

da cui:

$$d(L - p\dot{q}) = \dot{p}\, dq - \dot{q}\, dp + \frac{\partial L}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}} d\dot{\xi}.$$

Introduciamo la cosiddetta *funzione di Routh*

$$R(q, p, \xi, \dot{\xi}) = p\dot{q} - L, \tag{41,1}$$

nella quale la velocità $\dot{q}$ è espressa mediante l'impulso p utilizzando l'uguaglianza $p = dL/d\dot{q}$. Calcolando il differenziale, otteniamo:

$$dR = -\dot{p}\, dq + \dot{q}\, dp - \frac{\partial L}{\partial \xi} d\xi - \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}} d\dot{\xi}. \tag{41,2}$$

da cui risulta che

$$\dot{q} = \frac{\partial R}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial R}{\partial q}, \tag{41,3}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \xi} = -\frac{\partial R}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}} = -\frac{\partial R}{\partial \dot{\xi}}. \tag{41,4}$$

Sostituendo le ultime uguaglianze nell'equazione di Lagrange per la coordinata ξ, otteniamo:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial R}{\partial \dot{\xi}} = \frac{\partial R}{\partial \xi}. \tag{41,5}$$

La funzione di Routh è quindi funzione hamiltoniana rispetto alla coordinata q [equazione (41,3)] e lagrangiana rispetto alla coordinata ξ [equazione (41,5)].

Conformemente alla definizione generale, l'energia del sistema è

$$E = \dot{q}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} + \dot{\xi}\frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}} - L = p\dot{q} + \dot{\xi}\frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}} - L.$$

Sostituendovi la (41,1) e la (41,4), possiamo esprimere E mediante la funzione di Routh:

$$E = R - \dot{\xi}\frac{\partial R}{\partial \dot{\xi}}. \tag{41,6}$$

La generalizzazione delle formule ottenute al caso in cui si hanno piú coordinate q e ξ è immediata.

In particolare, l'uso della funzione di Routh può essere opportuno nel caso di coordinate cicliche. Se le coordinate q sono cicliche, non appaiono esplicitamente nella funzione di Lagrange e, di conseguenza, neanche nella funzione di Routh, cosicché R è funzione solo di p, ξ, $\dot{\xi}$. Gli impulsi generalizzati p corrispondenti alle coordinate cicliche sono inoltre costanti (ciò è evidente anche dalla seconda delle equazioni (41,3), la quale in questo senso non dà niente di nuovo). Sostituendo gli impulsi p con i loro valori costanti dati, le equazioni (41,5)

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial R(p, \xi, \dot{\xi})}{\partial \dot{\xi}} = \frac{\partial R(p, \xi, \dot{\xi})}{\partial \xi}$$

si riducono a equazioni contenenti soltanto le coordinate ξ, e quindi le coordinate cicliche vengono escluse completamente. Risolte queste equazioni e trovate le funzioni $\xi(t)$, sostituendole nel secondo membro delle equazioni

$$\dot{q} = \frac{\partial R(p, \xi, \dot{\xi})}{\partial p},$$

troviamo, con una integrazione diretta, le funzioni $q(t)$.

PROBLEMA

Trovare la funzione di Routh di una trottola simmetrica in un campo esterno $U(\varphi, \theta)$, eliminando la coordinata ciclica ψ (ψ, φ, θ sono angoli euleriani).

Soluzione. La funzione di Lagrange in questo caso è:

$$L = \frac{I_1'}{2}(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \operatorname{sen}^2\theta) + \frac{I_3}{2}(\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta)^2 - U(\varphi, \theta)$$

(cfr. problema 1 del § 35). La funzione di Routh quindi:

$$R = p_\psi \dot{\psi} - L = \frac{p_\psi^2}{2I_3} - p_\psi \dot{\varphi}\cos\theta - \frac{I_1'}{2}(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \operatorname{sen}^2\theta) + U(\varphi, \theta)$$

dove il primo termine è una costante che può essere omessa.

§ 42. *Parentesi di Poisson*

Sia $f(p, q, t)$ una funzione delle coordinate, degli impulsi e del tempo. Scriviamo la sua derivata totale rispetto al tempo

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_k \left(\frac{\partial f}{\partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial f}{\partial p_k}\dot{p}_k\right).$$

Sostituendo qui $\dot{q}_k$ e $\dot{p}_k$ con le loro espressioni ricavate dalle equazioni di Hamilton (40,4), otteniamo:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \{Hf\}, \tag{42,1}$$

dove è stata introdotta la notazione

$$\{Hf\} = \sum_k \left(\frac{\partial H}{\partial p_k}\frac{\partial f}{\partial q_k} - \frac{\partial H}{\partial q_k}\frac{\partial f}{\partial p_k}\right). \tag{42,2}$$

L'espressione (42,2) è detta *parentesi di Poisson* per le grandezze H ed f.

Quelle funzioni delle variabili dinamiche che restano costanti durante il moto del sistema sono dette, come sappiamo, integrali del moto. Dalla (42,1) si vede che la condizione perché la grandezza f sia integrale del moto ($df/dt = 0$), può esser scritta nella forma:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \{Hf\} = 0. \tag{42,3}$$

Se l'integrale del moto non dipende esplicitamente dal tempo, si ha

$$\{Hf\} = 0, \tag{42,4}$$

cioè la sua parentesi di Poisson con la hamiltoniana deve annullarsi.

Per qualsiasi coppia di grandezze f e g la parentesi di Poisson viene definita in maniera analoga al caso precedente, cioè:

$$\{fg\} = \sum_k \left(\frac{\partial f}{\partial p_k} \frac{\partial g}{\partial q_k} - \frac{\partial f}{\partial q_k} \frac{\partial g}{\partial p_k} \right) . \tag{42,5}$$

Le parentesi di Poisson godono delle seguenti proprietà, facilmente ricavabili dalla loro stessa definizione.

Scambiando le funzioni, la parentesi cambia segno; se una delle funzioni è costante (c), la parentesi è nulla:

$$\{fg\} = = \{gf\}, \tag{42,6}$$

$$\{fc\} = 0. \tag{42,7}$$

Inoltre:

$$\{f_1 + f_2, g\} = \{f_1 g\} + \{f_2 g\}, \tag{42,8}$$

$$\{f_1 f_2, g\} = f_1 \{f_2 g\} + f_2 \{f_1 g\}. \tag{42,9}$$

Prendendo la derivata parziale della (42,5) rispetto al tempo, si ottiene:

$$\frac{\partial}{\partial t} \{fg\} = \left\{ \frac{\partial f}{\partial t} g \right\} + \left\{ f \frac{\partial g}{\partial t} \right\} . \tag{42,10}$$

Se una delle funzioni f o g coincide con un impulso o con una coordinata, la parentesi di Poisson si riduce semplicemente alla derivata parziale:

$$\{fq_k\} = \frac{\partial f}{\partial p_k}, \tag{42,11}$$

$$\{fp_k\} = -\frac{\partial f}{\partial q_k}. \tag{42,12}$$

La formula (42,11), ad esempio, si ottiene ponendo nella (42,5) $g = q_k$; l'intera somma si riduce allora ad un termine, essendo $\frac{\partial q_k}{\partial q_l} = \delta_{kl}$, e $\frac{\partial q_k}{\partial p_l} = 0$. In particolare ponendo nelle (32,11) e (42,12) la funzione f uguale a q_i e p_i, si ottiene

$$\{q_i q_k\} = 0, \ \{p_i p_k\} = 0, \ \{p_i q_k\} = \delta_{ik}. \tag{42,13}$$

Fra le parentesi di Poisson formate da tre funzioni esiste la relazione

$$\{f \{gh\}\} + \{g \{hf\}\} + \{h\{fg\}\} = 0, \tag{42,14}$$

che è chiamata *identità di Jacobi*.

Per dimostrarla, notiamo che, secondo la definizione (42,5), le parentesi di Poisson $\{fg\}$ sono funzioni omogenee bilineari delle derivate prime delle grandezze f e g. Quindi, ad esempio, la parentesi $\{h \{fg\}\}$ rappresenta una funzione omogenea lineare delle derivate seconde delle grandezze f e g. Tutto il primo membro dell'uguaglianza (42,14) è, preso globalmente, una funzione omogenea lineare delle

derivate seconde di tutte le tre funzioni f, g, h. Riuniamo i termini contenenti le derivate seconde di f. La prima parentesi non contiene tali termini: essa include soltanto le derivate prime di f. Scriviamo la somma della seconda e della terza parentesi in forma simbolica, introducendo gli operatori differenziali lineari D_1 e D_2 definiti nel modo seguente:

$$D_1(\varphi) = \{g\varphi\}, \quad D_2(\varphi) = \{h\varphi\}.$$

Si ha allora

$$\{g\ \{fh\}\} + \{h\ \{fg\}\} = \{g\ \{hf\}\} - \{h\ \{gf\}\} =$$
$$= D_1(D_2(f)) - D_2(D_1(f)) = (D_1D_2 - D_2D_1)\, f.$$

È facile vedere, tuttavia, che una tale combinazione di operatori differenziali lineari non può contenere le derivate seconde di f. Infatti, la forma generale degli operatori differenziali lineari è

$$D_1 = \sum_k \xi_k \frac{\partial}{\partial x_k}, \quad D_2 = \sum_k \eta_k \frac{\partial}{\partial x_k},$$

dove ξ_k, η_k sono funzioni arbitrarie delle variabili x_1, x_2, . . . Di conseguenza,

$$D_1D_2 = \sum_{k,\,l} \xi_k\eta_l \frac{\partial^2}{\partial x_k\,\partial x_l} + \sum_{k,\,l} \xi_k \frac{\partial \eta_l}{\partial x_k}\frac{\partial}{\partial x_l}.$$

$$D_2D_1 = \sum_{k,\,l} \eta_k\xi_l \frac{\partial^2}{\partial x_k\,\partial x_l} + \sum_{k,\,l} \eta_k \frac{\partial \xi_l}{\partial x_k}\frac{\partial}{\partial x_l},$$

e la differenza di questi prodotti

$$D_1D_2 - D_2D_1 = \sum_{k,\,l} \left(\xi_k \frac{\partial \eta_l}{\partial x_k} - \eta_k \frac{\partial \xi_l}{\partial x_k}\right) \frac{\partial}{\partial x_l}$$

è di nuovo un operatore contenente soltanto derivate prime. In tal modo, nel primo membro dell'uguaglianza (42,14), tutti i termini con derivate seconde di f si annullano reciprocamente e poiché lo stesso si ha, evidentemente, per le funzioni g ed h, l'intera espressione è identicamente nulla.

Una proprietà importante delle parentesi di Poisson è la seguente: se f e g sono due integrali del moto, anche la loro parentesi è integrale del moto

$$\{fg\} = \text{costante} \tag{42,15}$$

(*teorema di Poisson*).

La dimostrazione di questo teorema è assai semplice se f e g non dipendono esplicitamente dal tempo. Ponendo nella identità di Jacobi $h = H$, si ottiene:

$$\{H\ \{fg\}\} + \{f\ \{gH\}\} + \{g\{Hf\}\} = 0.$$

Da questa relazione risulta che se $\{Hg\} = 0$ e $\{Hf\} = 0$, anche $\{H\{fg\}\} = 0$, come volevasi dimostrare.

Se invece gli integrali del moto f e g dipendono esplicitamente dal tempo, partendo dalla (42,1) abbiamo:

$$\frac{d}{dt}\{fg\} = \frac{\partial}{\partial t}\{fg\} + \{H\{fg\}\}.$$

Utilizzando la formula (42,10) e sostituendo la parentesi $\{H\{fg\}\}$ con altre mediante l'identità di Jacobi, otteniamo:

$$\frac{d}{dt}\{fg\} = \left\{\frac{\partial f}{\partial t} g\right\} + \left\{f \frac{\partial g}{\partial t}\right\} - \{f\{gH\}\} - \{g\{Hf\}\} =$$

$$= \left\{\frac{\partial f}{\partial t} + \{Hf\},\ g\right\} + \left\{f,\ \frac{\partial g}{\partial t} + \{Hg\}\right\}$$

ossia

$$\frac{d}{dt}\{fg\} = \left\{\frac{df}{dt} g\right\} + \left\{f \frac{dg}{dt}\right\}, \tag{42,16}$$

e la dimostrazione del teorema di Poisson in questo caso generale diventa a questo punto evidente.

È chiaro, che applicando il teorema di Poisson, non si hanno sempre nuovi integrali del moto, essendo il loro numero generalmente limitato ($2s - 1$, dove s è il numero di gradi di libertà). In alcuni casi, possiamo ottenere un risultato banale: le parentesi di Poisson si riducono ad una costante. In altri casi ancora, il nuovo integrale ottenuto può essere semplicemente una funzione degli integrali iniziali f e g. Se nessuno di questi casi si verifica, le parentesi di Poisson danno un nuovo integrale del moto.

PROBLEMI

1. Determinare le parentesi di Poisson formate dalle componenti cartesiane dell'impulso $\mathbf{p}$ e dal momento angolare $\mathbf{M} = [\mathbf{rp}]$ di un punto materiale.

Soluzione. Con l'aiuto della formula (42,12) si trova:

$$\{M_x p_y\} = -\frac{\partial M_x}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial y}(y p_z - z p_y) = -p_z,$$

e in modo analogo

$$\{M_x p_x\} = 0,\ \{M_x p_z\} = p_y.$$

Le altre parentesi si ottengono da queste per permutazione ciclica degli indici x, y, z.

2. Determinare le parentesi di Poisson formate dalle componenti di $\mathbf{M}$.

Soluzione. La formula (42,5) con un calcolo diretto dà:

$$\{M_x M_y\} = -M_z,\ \{M_y M_z\} = -M_x,\ \{M_z M_x\} = -M_y.$$

Poiché gli impulsi e le coordinate di particelle diverse sono variabili indipendenti l'una dall'altra, è facile vedere che le formule ottenute nei problemi 1 e 2 sono ugualmente valide per l'impulso e per il momento angolare totali di un qualsiasi sistema di particelle.

3. Dimostrare che

$$\{\varphi M_z\} = 0,$$

dove φ è una qualsiasi funzione scalare delle coordinate e dell'impulso di una particella.

Soluzione. Una funzione scalare può dipendere dalle componenti dei vettori $\mathbf{r}$ e $\mathbf{p}$ soltanto nelle combinazioni $\mathbf{r}^2$, $\mathbf{p}^2$, $\mathbf{rp}$. Pertanto

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{r}} = \frac{\partial\varphi}{\partial(\mathbf{r}^2)}\,2\mathbf{r} + \frac{\partial\varphi}{\partial(\mathbf{pr})}\,\mathbf{p}$$

e analogamente per $d\varphi/d\mathbf{p}$. La relazione $\{\varphi M_z\} = 0$ si verifica direttamente mediante la formula (42,5), tenendo conto delle regole di derivazione indicate.

4. Dimostrare che

$$\{\mathbf{f}M_z\} = [\mathbf{fn}],$$

dove $\mathbf{f}$ è una funzione vettoriale delle coordinate e dell'impulso di una particella, ed $\mathbf{n}$ il versore dell'asse z.

Soluzione. Ogni vettore $\mathbf{f}(\mathbf{r}, \mathbf{p})$ può essere scritto nella forma $\mathbf{f} = \mathbf{r}\varphi_1 + \mathbf{p}\varphi_2 + [\mathbf{rp}]\,\varphi_3$, dove φ_1, φ_2, φ_3 sono funzioni scalari. La relazione considerata si verifica con un calcolo diretto per mezzo delle formule (42,9), (42,11), (42,12) e della formula data nel problema 3.

§ 43. *Azione come funzione delle coordinate*

Per formulare il principio di minima azione abbiamo considerato l'integrale

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L\,dt, \tag{43,1}$$

preso lungo una traiettoria tra due posizioni date $q^{(1)}$ e $q^{(2)}$, in cui il sistema si trova negli istanti dati t_1 e t_2. Variando l'azione si sono confrontati i valori dell'integrale (43,1) presi per traiettorie vicine ed aventi per t_1 e t_2 gli stessi valori $q(t_1)$ e $q(t_2)$. Una sola di queste traiettorie corrisponde al moto reale, e precisamente quella per la quale l'integrale S è minimo.

Esaminiamo ora il concetto d'azione sotto un altro aspetto. Consideriamo S come una grandezza che caratterizza il moto lungo traiettorie reali, e confrontiamo i suoi valori per traiettorie aventi un'origine comune $q(t_1) = q^{(1)}$, ma passanti nell'istante t_2 per punti differenti. In altri termini, consideriamo l'integrale d'azione per le traiettorie effettive come funzione dei valori delle coordinate nell'estremo superiore d'integrazione.

La variazione dell'azione al passaggio da una traiettoria ad un'altra vicina è data (nel caso di un solo grado di libertà) dall'espressione (2,5):

$$\delta S = \frac{\partial L}{\partial\dot{q}}\,\delta q\Big|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}}\right)\delta q\,dt.$$

Poiché le traiettorie del moto effettivo soddisfano le equazioni di Lagrange, l'integrale si annulla. Poniamo nell'estremo inferiore del primo termine $\delta q\,(t_1) = 0$ ed indichiamo il valore $\delta q\,(t_2)$ semplicemente con δq. Sostituendo inoltre $dL/d\dot{q}$ con p, otteniamo alla fine $\delta S = p\delta q$, oppure, per un numero qualunque di gradi di libertà

$$\delta S = \sum_i p_i \delta q_i. \tag{43,2}$$

Da questa relazione risulta che le derivate parziali dell'azione rispetto alle coordinate sono uguali ai corrispondenti impulsi

$$\frac{\partial S}{\partial q_i} = p_i. \tag{43,3}$$

Analogamente si può considerare l'azione come funzione esplicita del tempo; in questo caso, si considerano le traiettorie che iniziano in un dato istante t_1 in un dato punto $q^{(1)}$ e terminano in un punto dato $q^{(2)}$ in istanti diversi $t_2 = t$. La derivata parziale $\partial S/\partial t$ intesa in questo senso può essere trovata mediante una variazione appropriata dell'integrale. È però piú semplice ricorrere alla funzione già nota (43,3), operando nel seguente modo.

Per definizione, la derivata totale dell'azione rispetto al tempo lungo la traiettoria è uguale a

$$\frac{dS}{dt} = L. \tag{43,4}$$

D'altra parte, considerando S come funzione delle coordinate e del tempo nel senso indicato sopra, e utilizzando la formula (43,3), si ha:

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial S}{\partial q_i}\dot{q}_i = \frac{\partial S}{\partial t} + \sum_i p_i \dot{q}_i.$$

Confrontando le due espressioni, si trova:

$$\frac{\partial S}{\partial t} = L - \sum_i p_i \dot{q}_i$$

e quindi:

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -H. \tag{43,5}$$

Le formule (43,3) e (43,5) si possono riunire in un'unica espressione

$$dS = \sum_i p_i\, dq_i - H\, dt \tag{43,6}$$

che dà il differenziale totale dell'azione come funzione delle coordinate e del tempo nell'estremo superiore dell'integrale (43,1). Supponiamo ora che le coordinate (e il tempo) siano diverse sia per la

posizione iniziale che per quella finale delle traiettorie. È evidente che, in questo caso, la variazione corrispondente di S sarà data dalla differenza delle espressioni (43,6) calcolate negli estremi inferiore e superiore, ovvero

$$dS = \sum p_i^{(2)} dq_i^{(2)} - H^{(2)} dt^{(2)} - \sum p_i^{(1)} dq_i^{(1)} + H^{(1)} dt^{(1)}. \qquad (43,7)$$

Questa relazione mostra che, qualunque sia l'azione esercitata dall'esterno sul sistema in moto, lo stato finale non può essere una funzione arbitraria di quello iniziale: sono possibili solo quei moti per i quali l'espressione (43,7) è un differenziale totale. In tal modo, indipendentemente dalla forma concreta della funzione di Lagrange, il principio di minima azione impone di per se stesso limiti ben determinati all'insieme dei moti possibili. In particolare, è possibile stabilire un complesso di leggi generali (indipendentemente dal tipo di campi esterni) per fasci di particelle, che si propagano da punti dati dello spazio. Lo studio di queste leggi costituisce l'oggetto dell'*ottica geometrica* [1]).

È interessante notare che le equazioni di Hamilton si possono dedurre formalmente dal principio di minima azione se questo è rappresentato, tenendo conto della (43,6), sotto forma di integrale:

$$S = \int \left(\sum_i p_i \, dq_i - H \, dt \right) \qquad (43,8)$$

e se le coordinate e gli impulsi sono considerati come grandezze che variano indipendentemente. Supponendo di nuovo, per brevità, che ci sia una sola coordinata (o un solo impulso), scriviamo la variazione dell'azione

$$\delta S = \int \left\{ \delta p \, dq + p d \, \delta q - \frac{\partial H}{\partial q} \delta q \, dt - \frac{\partial H}{\partial p} \delta p \, dt \right\}.$$

La trasformazione del secondo membro (cioè una integrazione per parti) dà:

$$\delta S = \int \delta p \left(dq - \frac{\partial H}{\partial p} dt \right) + p \delta q \Big| - \int \delta q \left(dp + \frac{\partial H}{\partial q} dt \right).$$

Agli estremi d'integrazione dobbiamo porre $\delta q = 0$, in modo che il membro integrato scompare. L'espressione che rimane può essere nulla per valori δp e δq arbitrari ed indipendenti, alla sola condizone che siano nulle le espressioni integrande in ciascuno dei due integrali

$$dq = \frac{\partial H}{\partial p} dt, \quad dp = -\frac{\partial H}{\partial q} dt,$$

dai quali, dividendo per dt, otteniamo le equazioni di Hamilton

---

[1]) Cfr. *Teoria dei campi*, cap. VII.

§ 44. *Principio di Maupertuis*

Mediante il principio di minima azione è possibile determinare completamente il moto di un sistema meccanico: risolvendo le equazioni del moto che si deducono da questo principio, si possono trovare sia la forma della traiettoria che la dipendenza della posizione su questa traiettoria dal tempo. Se il problema è limitato alla determinazione della sola coordinata (trascurando l'aspetto temporale del problema), è possibile allora dare al principio dal minima azione una forma semplificata.

Supponendo che la funzione di Lagrange, e con essa la funzione di Hamilton, non contenga in modo esplicito il tempo, l'energia del sistema si conserva

$$H(p, q) = E = \text{costante}.$$

Secondo il principio di minima azione, la variazione dell'azione per dati valori iniziali e finali delle coordinate e del tempo (poniamo t_0 e t) è nulla. Se invece viene variato anche l'istante finale t, mantenendo fisse le coordinate delle posizioni iniziali e finali, si ha allora [cfr. (43,7)]:

$$\delta S = -H\delta t. \tag{44,1}$$

Confrontiamo ora solo quegli spostamenti virtuali del sistema, che soddisfano la legge di conservazione dell'energia. Per queste traiettorie, sostituendo H nella (44,1) con la costante E abbiamo:

$$\delta S + E\delta t = 0. \tag{44,2}$$

Scrivendo l'azione nella forma (43,8) e sostituendo nuovamente H con E, abbiamo:

$$S = \int \sum_i p_i\, dq_i - E(t - t_0). \tag{44,3}$$

Il primo termine in questa espressione

$$S_0 = \int \sum_i p_i\, dq_i \tag{44,4}$$

si chiama talvolta *azione abbreviata*. Riportando la (44,3) nella (44,2), troviamo:

$$\delta S_0 = 0. \tag{44,5}$$

In tal modo l'azione abbreviata ha un minimo in rapporto a tutte le traiettorie che soddisfano la legge di conservazione dell'energia e che passano per il punto finale in un istante arbitrario. Per utilizzare questo principio variazionale, è necessario preliminarmente esprimere gli imulsi, nonché tutte le espressioni integrande nella

(44,4) in funzione delle coordinate q e dei loro differenziali dq. A tale scopo ricorriamo all'uguaglianza

$$p_i = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} L\left(q, \frac{dq}{dt}\right), \tag{44,6}$$

che definisce gli impulsi e all'equazione

$$E\left(q, \frac{dq}{dt}\right) = E \tag{44,7}$$

che esprime la legge di conservazione dell'energia. Rappresentando in quest'ultima equazione il differenziale dt in funzione delle coordinate q e dei loro differenziali dq e sostituendo nella (44,6), esprimiamo i momenti cinetici mediante q e dq, mentre l'energia E funge solo da parametro. Il principio variazionale cosí ottenuto determina le traiettorie del sistema; esso è chiamato abitualmente *principio di Maupertuis* (sebbene la sua definizione esatta sia stata data da Eulero e Lagrange).

Eseguiamo ora in modo esplicito le operazioni indicate partendo dalla forma normale della funzione di Lagrange (5,5), cioè l'espressione data della differenza fra energia cinetica e potenziale:

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i,k} a_{ik}(q)\, \dot{q}_i \dot{q}_k - U(q).$$

Gli impulsi sono allora

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \sum_k a_{ik}(q)\, \dot{q}_k,$$

e l'energia è

$$E = \frac{1}{2} \sum_{i,k} a_{ik}(q)\, \dot{q}_i \dot{q}_k + U(q).$$

Dall'ultima uguaglianza ricaviamo l'espressione:

$$dt = \sqrt{\frac{\sum a_{ik}\, dq_i\, dq_k}{2(E-U)}} \tag{44,8}$$

che, riportata nell'espressione

$$\sum_i p_i\, dq_i = \sum_{i,k} a_{ik} \frac{dq_k}{dt}\, dq_i,$$

ci dà l'azione abbreviata nella la forma

$$S_0 = \int \sqrt{2(E-U) \sum_{i,k} a_{ik}\, dq_i\, dq_k}. \tag{44,9}$$

In particolare, l'energia cinetica per un punto materiale è

$$T = \frac{m}{2}\left(\frac{dl}{dt}\right)^2$$

(dove m è la massa della particella, e dl l'elemento di lunghezza della traiettoria), e il principio variazionale per determinare la forma della traiettoria è

$$\delta \int \sqrt{2m\,(E - U)}\, dl = 0, \tag{44,10}$$

dove l'integrale è preso tra due punti dati dello spazio (Jacobi).

Per il moto libero di una particella si ha $U = 0$, e la (44,10) dà un risultato banale

$$\delta \int dl = 0,$$

cioè la particella si muove seguendo il percorso piú breve, ossia una retta. Ritorniamo all'espressione (44,3) per l'azione e eseguiamo su di essa una variazione anche rispetto al parametro E:

$$\delta S = \frac{\partial S_0}{\partial E}\,\delta E - (t - t_0)\,\delta E - E\delta t.$$

Sostituendo nella (44,2), troviamo:

$$\frac{\partial S_0}{\partial E} = t - t_0. \tag{44,11}$$

Per l'azione abbreviata nella forma (44,9), questa uguaglianza conduce alla relazione

$$\int \sqrt{\frac{\sum a_{ik}\, dq_i\, dq_k}{2\,(E - U)}} = t - t_0, \tag{44,12}$$

che non è altro che l'integrale dell'equazione (44,8). Insieme con l'equazione della traiettoria essa determina completamente il moto

PROBLEMA

Partendo dal principio variazionale (44,10), trovare l'equazione defferenziale della traiettoria.

Soluzione. Effettuando la variazione, si ha:

$$\delta \int \sqrt{E - U}\, dl = -\int \left\{ \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}} \frac{\delta \mathbf{r}}{2\sqrt{E - U}}\, dl - \sqrt{E - U}\, \frac{d\mathbf{r}}{dl}\, d\delta \mathbf{r} \right\}.$$

Nel secondo termine si è tenuto conto che $dl^2 = d\mathbf{r}^2$ e quindi $dl\, d\,\delta l = d\mathbf{r}\, d\,\delta\mathbf{r}$; integrando per parti questo termine ed eguagliando poi a zero il coefficiente di $\delta\mathbf{r}$ nell'espressione integranda, otteniamo l'equazione differenziale della traiettoria

$$2\sqrt{E - U}\, \frac{d}{dl}\left(\sqrt{E - U}\, \frac{d\mathbf{r}}{dl}\right) = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}}.$$

Derivando il primo membro di questa uguaglianza ed introducendo la forza $\mathbf{F} = -dU/d\mathbf{r}$, si può scrivere questa equazione nella forma

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dl^2} = \frac{\mathbf{F} - (\mathbf{F}\mathbf{t})\,\mathbf{t}}{2\,(E-U)},$$

dove $\mathbf{t} = d\mathbf{r}/dl$ è il vettore unitario della tangente alla traiettoria. La differenza $\mathbf{F} - (\mathbf{F}\mathbf{t})\,\mathbf{t}$ è la componente $\mathbf{F}_n$ normale alla traiettoria della forza. La derivata $d^2\mathbf{r}/dl^2 = d\mathbf{t}/dl$ è uguale, come è noto dalla geometria differenziale, ad $\mathbf{n}/R$, dove R è il raggio di curvatura della traiettoria, ed $\mathbf{n}$ il vettore unitario della normale principale a quest'ultima. Sostituendo anche $E - U$ con $mv^2/2$, si ottiene:

$$\mathbf{n}\frac{mv^2}{R} = \mathbf{F}_n$$

in accordo con l'espressione nota dell'accelerazione normale in un moto lungo una traiettoria curva.

§ 45. *Trasformazioni canoniche*

La scelta delle coordinate generalizzate q non è limitata da condizione alcuna: la loro funzione può essere svolta da s grandezze qualsiasi che definiscano univocamente la posizione del sistema nello spazio. L'aspetto formale delle equazioni di Lagrange (2,6) non dipende da questa scelta; in questo senso si può dire che le equazioni di Lagrange sono invarianti rispetto alla trasformazione dalle coordinate $q_1, q_2, \ldots$ ad altre grandezze indipendenti $Q_1, Q_2, \ldots$ Le nuove coordinate Q sono funzioni delle vecchie coordinate q, è inoltre ammissibile una scelta tale che in queste funzioni ci sia anche il tempo in modo esplicito, cioè che si tratti di trasformazioni del tipo:

$$Q_i = Q_i\,(q,\ t) \tag{45,1}$$

(dette talvolta *trasformazioni puntuali*).

Oltre alle equazioni di Lagrange, la trasformazione (45,1) lascia evidentemente invariata la forma (40,4) delle equazioni di Hamilton, che ammettono però in realtà una classe di trasformazioni molto piú vasta. Questa circostanza è dovuta naturalmente al fatto che nel metodo hamiltoniano gli impulsi p sono variabili indipendenti unitamente alle coordinate q. Per questo il concetto di trasformazione può essere ampliato in modo da includere la trasformazione di tutte le $2s$ variabili indipendenti per mezzo della quale le variabili p, q vengono sostituite con nuove variabili P, Q secondo le formule:

$$Q_i = Q_i\,(p,\ q,\ t), \quad P_i = P_i\,(p,\ q,\ t). \tag{45,2}$$

La possibilità di allargare la classe delle trasformazioni ammissibili rappresenta uno dei vantaggi sostanziali della formulazione hamiltoniana della meccanica.

Sarebbe tuttavia errato pensare che per una trasformazione qualsiasi del tipo (45,2) le equazioni del moto conservino la loro forma canonica. Stabiliamo ora le condizioni cui deve soddisfare una trasformazione perché le equazioni del moto nelle nuove variabili P, Q, abbiano la forma

$$Q_i = \frac{\partial H'}{\partial P_i}, \quad \dot{P}_i = -\frac{\partial H'}{\partial Q_i} \tag{45,3}$$

con una nuova funzione di Hamilton $H'(P, Q)$. Trasformazioni del genere sono dette *trasformazioni canoniche*.

Le formule di trasformazioni canoniche si possono trovare nel seguente modo. Alla fine del § 43 abbiamo mostrato che le equazioni di Hamilton possono essere ottenute a partire dal principio di minima azione presentato nella forma

$$\delta \int \left(\sum_i p_i \, dq_i - H \, dt \right) = 0 \tag{45,4}$$

(sottolineiamo che tutte le coordinate e tutti gli impulsi variano indipendentemente). Affinché anche le nuove variabili P e Q soddisfino le equazioni di Hamilton, per esse deve restare valido il prinicipio di minima azione:

$$\delta \int \left(\sum_i P_i \, dQ_i - H' \, dt \right) = 0. \tag{45,5}$$

Ma i due princípi (45,4) e (45,5) sono equivalenti soltanto a condizione che le loro espressioni integrande differiscano fra di loro solo per il differenziale totale di una funzione arbitraria F delle coordinate, degli impulsi e del tempo; la differenza tra i due integrali (differenza dei valori di F nei limiti d'integrazione) sarà allora una costante inessenziale agli effetti della variazione . Si ha quindi:

$$\Sigma \, p_i \, dq_i - H dt = \Sigma \, P_i \, dQ_i - H' \, dt + dF.$$

Ogni trasformazione canonica è caratterizzata da una sua funzione F, detta *funzione generatrice* della trasformazione.

Riscrivendo la relazione ottenuta nella forma

$$dF = \Sigma p_i \, dq_i - \Sigma p_i \, dQ_i + (H' - H) \, dt, \tag{45,6}$$

vediamo che

$$p_i = \frac{\partial F}{\partial q_i}, \quad P_i = -\frac{\partial F}{\partial Q_i}, \quad H' = H + \frac{\partial F}{\partial t}, \tag{45,7}$$

dove si è posto che la funzione generatrice è data come funzione sia delle vecchie che delle nuove coordinate (e del tempo): $F = F(q, Q, t)$. Per una funzione F data, le formule (45,7) stabiliscono la relazione tra le vecchie variabili (p, q) e le nuove (P, Q), nonché la forma della nuova funzione di Hamilton.

Può risultare comodo esprimere la funzione generatrice non mediante le variabili q e Q, ma mediante le vecchie coordinate q e i nuovi impulsi P. Per stabilire le formule delle trasformazioni canoniche in questo caso, è necessario effettuare nella relazione (45,6) l'appropriata trasformazione di Legendre. Scriviamo questa relazione nella forma

$$d\,(F + \Sigma\, P_i Q_i) = \Sigma p_i dq_i + \Sigma Q_i\, dP_i + (H' - H)\, dt.$$

L'espressione sotto il segno di differenziale nel primo membro, espressa nelle variabili q e P, rappresenta appunto la nuova funzione generatrice. Indicandola con $\Phi\,(q,\ P,\ t)$, abbiamo) [1]):

$$p_i = \frac{\partial \Phi}{\partial q_i}, \quad Q_i = \frac{\partial \Phi}{\partial P_i}, \quad H' = H + \frac{\partial \Phi}{\partial t}. \tag{45,8}$$

Analogamente si possono stabilire le formule delle trasformazioni canoniche espresse mediante funzioni generatrici che dipendano dalle variabili p e Q oppure p e P.

Notiamo che la vecchia e la nuova funzione hamiltoniana sono legate sempre dalla medesima relazione: la differenza $H' - H$ è data dalla derivata parziale rispetto al tempo della funzione generatrice. In particolare, se quest'ultima non dipende dal tempo, $H' = H$. In altri termini, per ottenere la nuova funzione di Hamilton sarà sufficiente in questo caso sostituire in H le grandezze p e q espresse in funzione delle nuove variabili P, Q,

La vastità delle trasformazioni canoniche nel metodo hamiltoniano priva sensibilmente il concetto di coordinate e di impulsi generalizzati del loro significato iniziale. Poiché le trasformazioni (45,2) collegano ciascuna delle grandezze P e Q sia alle coordinate q che ai momenti cinetici p, le variabili Q non hanno piú il significato di coordinate puramente spaziali. La differenza tra i due gruppi di variabili diventa, in fondo, una questione di nomenclatura. Questa circostanza si manifesta palesemente, per esempio, nella trasformazione[2]) $Q_i = p_i$, $P_i = -q_i$ la quale non cambia esplicitamente la forma canonica delle equazioni e si riduce semplicemente ad uno scambio di denominazioni tra le coordinate e gli impulsi.

---

[1]) Notiamo che prendendo una funzione generatrice nella forma

$$\Phi = \sum_i f_i\,(q,\ t)\, P_i$$

(dove f_i sono funzioni arbitrarie), otterremo una trasformazione per cui le nuove coordinate sono stabilite dalla relazione $Q_i = f_i\,(q,\ t)$, cioè si esprimono in funzione soltanto delle vecchie coordinate (e non degli impulsi)). Queste sono trasformazioni puntuali che costituiscono naturalmente un caso particolare delle trasformazioni canoniche.

[2]) La funzione generatrice per questa trasformazione è $F = \sum q_i Q_i$.

Tenendo conto di questa convenzione di terminologia, le variablili p e q, nel metodo hamiltoniano, sono spesso chiamate semplicemente *grandezze canonicamente coniugate.*

La condizione perché le variabili siano canonicamente coniugate può essere espressa con le parentesi di Poisson. A questo fine dimostreremo il teorema generale sull'invarianza delle parentesi di Poisson per le trasformazioni canoniche.

Sia $\{fg\}_{p,q}$ la parentesi di Poisson delle grandezze f e g nella quale la derivazione viene effettuata rispetto alle variabili p e q, e sia $\{fg\}_{P,Q}$ la parentesi di Poisson delle stesse grandezze derivabili rispetto alle variabili canoniche P e Q. Si ha allora:

$$\{fg\}_{p,q} = \{fg\}_{P,Q}. \tag{45,9}$$

Si può verificare la validità di questa relazione con un calcolo diretto utilizzando le formule di trasformazione canonica. Si può, però, far a meno del calcolo se si fa il seguente ragionamento.

Notiamo innanzitutto che nelle trasformazioni canoniche (45,7) o (45,8) il tempo ha la funzione di parametro. Quindi il teorema (45,9), se lo dimostriamo per grandezze non dipendenti esplicitamente dal tempo, è vero anche nel caso generale. Consideriamo ora in modo puramente formale la grandezza g come funzione hamiltoniana di un sistema fittizio. Secondo la formula (42,1), si ha allora $\{fg\}_{p,q} = -df/dt$. La derivata df/dt può però dipendere solamente dalle proprietà del moto (del nostro sistema fittizio) come tale, e non dalla scelta delle variabili. Di conseguenza, anche la parentesi di Poisson $\{fg\}$ non può cambiare passando da certe variabili canoniche ad altre.

Dalle formule (42,13) e dal teorema (45,9) ricaviamo:

$$\{Q_iQ_k\}_{p,q} = 0, \quad \{P_iP_k\}_{p,q} = 0, \quad \{P_iQ_k\}_{p,q} = \delta_{ik}. \tag{45,10}$$

Queste relazioni scritte mediante le parentesi di Poisson rappresentano le condizioni cui debbono soddisfare le nuove variabili perché la trasformazione $p, q \to P, Q$ sia canonica.

È interessante notare che la variazione delle grandezze p, q durante il moto stesso può essere considerata come una trasformazione canonica. Il significato di questa asserzione è il seguente. Siano q_t, p_t i valori delle variabili canoniche nell'istante t, $q_{t+\tau}$, $p_{t+\alpha\tau}$ i loro valori in un altro istante $t + \tau$. Questi ultimi sono funzioni dei primi (e dell'intervallo di tempo τ come parametro):

$$q_{t+\tau} = q(q_t, p_t, \tau), \quad p_{t+\tau} = p(q_t, p_t, \tau),$$

se queste formule si considerano come una trasformazione dalle variabili q_t, p_t alle variabili $q_{t+\tau}$, $p_{t+\tau}$, questa trasformazione è canonica. Ciò risulta chiaro dall'espressione $dS = \Sigma\,(p_{t+\tau}\,dq_{t+\tau} - p_t\,dq_t)$ per il differenziale d'azione $S\,(q_{t+\tau}, q_t)$ preso lungo la

traiettoria reale passante per i punti q_t e $q_{t+\tau}$ negli istanti dati t e $t+\tau$ [vedi (43,7)]. Confrontando questa formula con la (45,6) vediamo che $-S$ è la funzione generatrice della trasformazione.

§ 46. *Teorema di Liouville*

Per l'interpretazione geometrica dei fenomeni meccanici si ricorre spesso al concetto di *spazio delle fasi*: uno spazio a $2s$ dimensioni sui cui assi coordinati si riportano le s coordinate generalizzate e i s impulsi del sistema meccanico dato. Ciascun punto di questo spazio corrisponde a un determinato stato del sistema. Quando il sistema si muove, il punto fase che rappresenta il suo stato descrive nello spazio delle fasi una curva, detta traiettoria di fase. Il prodotto dei differenziali

$$d\Gamma = dq_1 \ldots dq_s dp_1 \ldots dp_s$$

può essere considerato come un « elemento di volume » dello spazio delle fasi. Consideriamo ora l'integrale $\int d\Gamma$ preso in una parte qualsiasi dello spazio delle fasi e rappresentante il volume di questa. Mostriamo che questa grandezza possiede la proprietà di essere invariante rispetto alle trasformazioni canoniche: se si trasformano canonicamente le variabili p, q nelle variabili P, Q, i volumi dei domini corrispondenti degli spazi p, q e P, Q sono uguali:

$$\int \ldots \int dq_1 \ldots dq_s\, dp_1 \ldots dp_s = \int \ldots \int dQ_1 \ldots dQ_s dP_1 \ldots \ldots dP_s \qquad (46,1)$$

Come è noto, la trasformazione delle variabili in un integrale multiplo si esegue secondo la formula

$$\int \ldots \int dQ_1 \ldots dQ_s\, dP_1 \ldots dP_s = \\ = \int \ldots \int D\, dq_1 \ldots dq_s\, dp_1 \ldots dp_s,$$

dove

$$D = \frac{\partial(Q_1, \ldots, Q_s, P_1, \ldots, P_s)}{\partial(q_1, \ldots, q_s, p_1, \ldots, p_s)} \qquad (46,2)$$

è lo jacobiano della trasformazione. Per questo la dimostrazione del teorema (46,1) si riduce alla dimostrazione che lo jacobiano di qualsiasi trasformazione canonica è uguale all'unità:

$$D = 1. \qquad (46,3)$$

Serviamoci di una nota proprietà degli jacobiani che permette in un certo senso di trattarli come frazioni. Dividendo il « numeratore » e il « denominatore » per $\partial(q_1, \ldots, q_s, P_1, \ldots, P_s)$,

otteniamo:

$$D = \frac{\partial(Q_1, \ldots, Q_s, P_1, \ldots, P_s)}{\partial(q_1, \ldots, q_s, P_1, \ldots, P_s)} \Big/ \frac{\partial(q_1, \ldots, q_s, p_1, \ldots, p_s)}{\partial(q_1, \ldots, q_s, P_1, \ldots, P_s)}.$$

Secondo un'altra nota regola, uno jacobiano al cui « numeratore » e « denominatore » sono presenti variabili uguali si può ridurre a uno jacobiano con un numero inferiore di variabili; per tutte le derivazioni, le variabili uguali sono da considerarsi costanti. Perciò

$$D = \left\{ \frac{\partial(Q_1, \ldots, Q_s)}{\partial(q_1, \ldots, q_s)} \right\}_{P=\text{costante}} \Big/ \left\{ \frac{\partial(p_1, \ldots, p_s)}{\partial(P_1, \ldots, P_s)} \right\}_{q=\text{costante}}. \qquad (46,4)$$

Consideriamo lo jacobiano che si trova al numeratore di questa espressione. Per definizione, è un determinante di rango s, composto di elementi dQ_i/dq_k (l'elemento sta all'intersezione della i-esima riga e della k-esima colonna). Rappresentando la trasformazione canonica con l'aiuto della funzione generatrice $\Phi(q, P)$ nella forma (45,8), otteniamo:

$$\frac{\partial Q_i}{\partial q_k} = \frac{\partial^3 \Phi}{\partial q_k \, \partial P_i}.$$

Nello stesso modo si trova che l'elemento della i-esima riga e della k-esima colonna del determinante denominatore della (46,4) è uguale a $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial q_i \partial P_k}$. Abbiamo trovato quindi che le righe di uno dei determinanti sono identiche alle colonne dell'altro e viceversa. I due determinanti sono pertanto uguali poiché il rapporto (46,4) è uguale all'unità, come si doveva dimostrare.

Supponiamo ora che ciascun punto di un dato elemento dello spazio delle fasi si sposti nel tempo secondo le equazioni del moto del sistema meccanico considerato. Si sposterà dunque globalmente tutto l'elemento, ma resta inalterato il suo volume:

$$\int d\Gamma = \text{costante}. \qquad (46,5)$$

Questa asserzione (detta *teorema di Liouville*) segue immediatamente dall'invarianza di un volume di fase rispetto alle trasformazioni canoniche, e dal fatto che la variazione di p e q nel corso del moto può essere considerata di per se stessa (come abbiamo mostrato alla fine del paragrafo precedente) come una trasformazione canonica.

In modo assolutamente analogo si può dimostrare l'invarianza degli integrali

$$\int\int \sum_i dq_i \, dp_i.$$

$$\int\int\int\int \sum_{i \neq k} dq_i \, dp_i \, dq_k \, dp_k,$$

. . . . . .

nei quali l'integrazione è estesa a varietà bidimensionali, quadridimensionali, ecc., dello spazio delle fasi.

§ 47. *Equazione di Hamilton-Jacobi*

Nel § 43 abbiamo introdotto il concetto di azione come funzione delle coordinate e del tempo. Abbiamo mostrato che la derivata parziale rispetto al tempo di questa funzione $S(q, t)$ è legata alla funzione di Hamilton dalla relazione

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H(q, p, t) = 0,$$

e che le sue derivate parziali rispetto alle coordinate coincidono con gli impulsi. Sostituendo gli impulsi p nella funzione di Hamilton con le derivate dS/dq, otteniamo l'equazione

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(q_1, \ldots, q_s; \frac{\partial S}{\partial q_1}, \ldots, \frac{\partial S}{\partial q_s}; t\right) = 0, \qquad (47,1)$$

cui deve soddisfare la funzione $S(q, t)$. Questa è un'equazione a derivate parziali del primo ordine, detta *equazione di Hamilton-Jacobi*. Alla pari delle equazioni di Lagrange e delle equazioni canoniche, anche l'equazione di Hamilton-Jacobi rappresenta il punto di partenza di un metodo generale d'integrazione delle equazioni del moto.

Prima di esporre questo metodo, ricordiamo che ogni equazione a derivate parziali del primo ordine possiede una soluzione dipendente da una funzione arbitraria; tale soluzione è detta integrale generale dell'equazione. Nelle applicazioni meccaniche, però, non è l'integrale generale dell'equazione di Hamilton-Jacobi, ad avere importanza, bensí il cosiddetto *integrale completo*, che rappresenta la soluzione di un'equazione differenziale a derivate parziali contenente tante costanti arbitrarie quante sono le variabili indipendenti.

Nell'equazione di Hamilton-Jacobi queste variabili indipendenti sono il tempo e le coordinate. Di conseguenza, per un sistema a s gradi di libertà, l'integrale completo di questa equazione deve contenere $s + 1$ costanti arbitrarie. Essendo però la funzione S presente nell'equazione soltanto attraverso le sue derivate, una delle costanti arbitrarie appare nell'integrale completo come una grandezza additiva, cioè l'integrale completo dell'equazione di Hamilton-Jacobi prende la forma

$$S = f(t, q_1, \ldots, q_s; \alpha_1, \ldots, \alpha_s) + A, \qquad (47,2)$$

dove $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ ed A sono costanti arbitrarie[1]).

[1]) Anche se non avremo bisogno dell'integrale generale dell'equazione di Hamilton-Jacobi, mostriamo però che esso può essere trovato conoscendo il suo integrale completo. Consideriamo a tale scopo la grandezza A come funzio-

Esplicitiamo ora la relazione tra l'integrale completo dell'equazione di Hamilton-Jacobi e la soluzione delle equazioni del moto che ci interessa. A tale scopo eseguiamo, mediante una trasformazione canonica, una sostituzione delle grandezze q, p con nuove variabili, scegliendo per funzione generatrice la funzione $f(t, q, \alpha)$ e per nuovi impulsi le grandezze $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$. Indichiamo con $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s$ le nuove coordinate. Siccome la funzione generatrice dipende dalle vecchie coordinate e dai nuovi impulsi, dobbiamo servirci delle formule (45,8):

$$p_i = \frac{\partial f}{\partial q_i}, \quad \beta_i = \frac{\partial f}{\partial \alpha_i}, \quad H' = H + \frac{\partial f}{\partial t}.$$

Dato che la funzione f soddisfa l'equazione di Hamilton-Jacobi, segue che la nuova funzione di Hamilton è identicamente nulla:

$$H' = H + \frac{\partial f}{\partial t} = H + \frac{\partial S}{\partial t} = 0.$$

Le equazioni canoniche hanno quindi per le nuove variabili la forma $\dot{\alpha}_i = 0$, $\dot{\beta}_i = 0$, da cui segue che

$$\alpha_i = \text{costante}, \quad \beta_i = \text{costante}. \tag{47,3}$$

D'altra parte, le s equazioni

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha_i} = \beta_i$$

danno la possibilità di esprimere le s coordinate q in funzione del tempo e delle $2s$ costanti α e β. In tal modo si arriva a trovare l'integrale generale delle equazioni del moto.

La soluzione del problema del moto di un sistema meccanico con il metodo di Hamilton-Jacobi si riduce quindi alle seguenti operazioni.

---

ne arbitraria di altre costanti:

$$S = f(t, q_1, \ldots, q_s; \alpha_1, \ldots, \alpha_s) + A(\alpha_1, \ldots, \alpha_s).$$

Sostituendo qui le grandezze α_i con le funzioni delle coordinate e del tempo ricavate dalle s condizioni

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_i} = 0,$$

otteniamo un integrale generale che dipende dalla forma della funzione arbitraria $A(\alpha_1, \ldots, \alpha)$). In effetti, per la funzione S cosí ottenuta abbiamo:

$$\frac{\partial S}{\partial q_i} = \left(\frac{\partial S}{\partial q_i}\right)_\alpha + \sum_k \left(\frac{\partial S}{\partial \alpha_k}\right)_q \frac{\partial \alpha_k}{\partial q_i} = \left(\frac{\partial S}{\partial q_i}\right)_\alpha.$$

Ma le grandezze $(\partial S/\partial q_i)_\alpha$ soddisfano l'equazione di Hamilton-Jacobi perché la funzione $S(t, q; \alpha)$ è, secondo la nostra ipotesi, un integrale completo di questa equazione. Quindi anche le derivate $\partial S/\partial q_i$ soddisfano l'equazione in questione.

Partendo dalla funzione di Hamilton, si scrive l'equazione di Hamilton-Jacobi e si ottiene l'integrale completo (47,2) di questa equazione. Derivandolo rispetto alle costanti arbitrarie α ed eguagliando queste derivate alle nuove costanti β, otteniamo un sistema di s equazioni algebriche

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_i} = \beta_i. \tag{47,4}$$

Risolvendo questo sistema, troviamo le coordinate q in funzione del tempo e delle $2s$ costanti arbitrarie. Successivamente, si può determinare la dipendenza degli impulsi dal tempo per mezzo delle equazioni $p_i = dS/dq_i$.

Nel caso in cui si abbia un integrale incompleto dell'equazione di Hamilton-Jacobi dipendente da un numero di costanti arbitrarie inferiore ad s, non è possibile mediante questo integrale trovare l'integrale generale delle equazioni del moto; si può tuttavia semplificare un po' il problema. Se la funzione S è nota e contiene una costante arbitraria α, la relazione

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha} = \text{costante}$$

ci dà un'equazione che lega $q_i, \ldots, q_s$ e t.

L'equazione di Hamilton-Jacobi assume una forma un po' più semplice nel caso in cui la funzione H non dipende esplicitamente dal tempo, cioè quando il sistema è conservativo. La dipendenza dell'azione dal tempo si riduce allora al termine $-Et$:

$$S = S_0(q) - Et \tag{47,5}$$

(cfr. § 44), e, sostituendo nella (47,1), otteniamo per l'azione abbreviata $S_0(q)$ l'equazione di Hamilton-Jacobi nella forma

$$H\left(q_1, \ldots, q_s; \frac{\partial S_0}{\partial q_1}, \ldots, \frac{\partial S_0}{\partial q_s}\right) = E. \tag{47,6}$$

§ 48. *Separazione delle variabili*

In molti casi importanti si può trovare un integrale completo dell'equazione di Hamilton-Jacobi mediante la cosiddetta *separazione delle variabili* che consiste in quanto segue.

Supponiamo che una coordinata, che indicheremo con q_1, e la derivata corrispondente dS/dq_1 entrino nell'equazione di Hamilton-Jacobi soltanto in una certa combinazione del tipo $\varphi\left(q_1, \frac{\partial S}{\partial q_1}\right)$ che non contiene né altre coordinate (o tempo), né altre derivate; in altri termini, supponiamo che l'equazione abbia la forma

$$\Phi\left\{q_i, t, \frac{\partial S}{\partial q_i}, \frac{\partial S}{\partial t}, \varphi\left(q_1, \frac{\partial S}{\partial q_1}\right)\right\} = 0, \tag{48,1}$$

dove q_i rappresenta l'insieme di tutte le coordinate, ad eccezione di q_1.

Cercheremo in questo caso una soluzione sotto forma di somma

$$S = S'(q_i, t) + S_1(q_1). \tag{48,2}$$

Sostituendo questa espressione nell'equazione (48,1), otteniamo

$$\Phi\left\{q_i, t, \frac{\partial S'}{\partial q_i}, \frac{\partial S'}{\partial t}, \varphi\left(q_1, \frac{dS_1}{dq_1}\right)\right\} = 0. \tag{48,3}$$

Supponiamo di aver trovato la soluzione (48,2); sostituiamola nell'equazione (48,3), che si deve allora trasformare in un'identità, verificata, in particolare, per qualsiasi valore della coordinata q_1. Al variare di q_1 può cambiare però solo la funzione φ; affinché l'espressione (48,3) sia un'identità, è necessario che anche la funzione φ sia essa stessa costante. In tal modo, l'equazione (48,3) si scinde in due equazioni:

$$\varphi\left(q_1, \frac{dS_1}{dq_1}\right) = \alpha_1, \tag{48,4}$$

$$\Phi\left\{q_i, t, \frac{\partial S'}{\partial q_i}, \frac{\partial S'}{\partial t}, \alpha_1\right\} = 0, \tag{48,5}$$

dove α_1 è una costante arbitraria. La prima di queste equazioni è un'equazione differenziale ordinaria dalla quale si può ricavare la funzione $S_1(q_1)$ con una semplice integrazione. La (48,5) è un'equazione a derivate parziali contenente però un numero minore di variabili indipendenti.

Se in questo modo si possono separare successivamente tutte le s coordinate e il tempo, il calcolo dell'integrale completo dell'equazione di Hamilton-Jacobi si riduce interamente a quadrature. Per un sistema conservativo si tratta soltanto di separare s variabili (le coordinate) nell'equazione (47,6), e per una separazione completa l'integrale cercato assume la forma

$$S = \sum_k S_k(q_k; \alpha_1, \ldots, \alpha_s) - E(\alpha_1, \ldots, \alpha_s)\, t, \tag{48,6}$$

dove ciascuna delle funzioni S_k dipende solo da una delle coordinate, mentre l'energia E come funzione di costanti arbitrarie $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ si ottiene sostituendo $S_0 = \Sigma S_k$ nell'equazione (47,6).

Un caso particolare di separazione delle variabili è quello in cui una delle variabili è ciclica. La coordinata ciclica q_1 non entra esplicitamente nella funzione di Hamilton e, di conseguenza, nell'equazione di Hamilton-Jacobi. La funzione $\varphi\left(q_1, \frac{\partial S}{\partial q_1}\right)$ si scrive allora semplicemente dS/dq_1, e dall'equazione (48,4) si ricava $S_1 = \alpha_1 q_1$, in modo che

$$S = S'(q_i, t) + \alpha_1 q_1. \tag{48,7}$$

La costante α_1 rappresenta qui nient'altro che il valore costante $p_1 = dS/dq_1$ dell'impulso corrispondente alla coordinata ciclica. Notiamo che la separazione del tempo in forma del termine $-Et$ per un sistema conservativo corrisponde al metodo di separazione delle variabili, se si prende t come « variabile ciclica ».

In tal modo, il metodo di separazione delle variabili nell'equazione di Hamilton-Jacobi comprende tutti i casi esaminati sopra di semplificazione dell'integrazione delle equazioni del moto, basati sull'impiego delle variabili cicliche. Ad essi si aggiungono numerosi casi in cui la separazione delle variabili è possibile, anche se le coordinate non sono cicliche. Tutto questo porta alla conclusione che il metodo di Hamilton-Jacobi per la ricerca dell'integrale generale delle equazioni del moto è il piú efficace.

Per separare le variabili nell'equazione di Hamilton-Jacobi, è essenziale scegliere in modo appropriato le coordinate. Facciamo degli esempi di separazione delle variabili in diversi sistemi di coordinate che possono presentare un interesse fisico nei problemi del moto di un punto materiale in differenti campi esterni.

1. *Coordinate sferiche.* In queste coordinate (r, θ, φ) la funzione di Hamilton si scrive:

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\varphi^2}{r^2 \operatorname{sen}^2 \theta}\right) + H(r, \theta, \varphi)$$

e la separazione delle variabili è possibile se

$$U = a(r) + \frac{b(\theta)}{r^2} + \frac{c(\varphi)}{r^2 \operatorname{sen}^2 \theta},$$

dove $a(r)$, $b(\theta)$, $c(\varphi)$ sono funzioni arbitrarie. È difficile che l'ultimo termine di questa espressione possa presentare interesse dal punto di vista fisico; per questo considereremo un campo del tipo

$$U = a(r) + \frac{b(\theta)}{r^2}. \tag{48,8}$$

L'equazione di Hamilton-Jacobi per la funzione S_0 è in questo caso

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S_0}{\partial r}\right)^2 + a(r) + \frac{1}{2mr^2}\left[\left(\frac{\partial S_0}{\partial \theta}\right)^2 + 2mb(\theta)\right] + \\ + \frac{1}{2mr^2 \operatorname{sen}^2 \theta}\left(\frac{\partial S_0}{\partial \varphi}\right)^2 = E.$$

Prendendo in considerazione che la coordinata φ è ciclica, cerchiamo una soluzione del tipo

$$S_0 = p_\varphi \varphi + S_1(r) + S_2(\theta)$$

e per le funzioni $S_1(r)$ ed $S_2(\theta)$ otteniamo le equazioni

$$\left(\frac{dS_2}{d\theta}\right)^2 + 2mb(\theta) + \frac{p_\varphi^2}{\operatorname{sen}^2\theta} = \beta,$$

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{dS_1}{dr}\right)^2 + a(r) + \frac{\beta}{2mr^2} = E.$$

Integrando abbiamo infine:

$$S = -Et + p_\varphi\varphi + \int \sqrt{\beta - 2mb(\theta) - \frac{p_\varphi^2}{\operatorname{sen}^2\theta}}\, d\theta + \\ + \int \sqrt{2m[E - a(r)] - \frac{\beta}{r^2}}\, dr. \quad (48,9)$$

In questo caso le costanti arbitrarie sono p_φ, β, E; derivando rispetto a quest'ultime ed eguagliando il risultato della derivazione a nuove costanti, si trova la soluzione generale delle equazioni del moto.

2. *Coordinate paraboliche.* Si passa alle coordinate paraboliche ξ, η, φ dalle coordinate cilindriche (le indicheremo in questo paragrafo con ρ, φ, z) secondo le formule

$$r = \frac{1}{2}(\xi - \eta), \quad \rho = \sqrt{\xi\eta}. \quad (48.10)$$

Le coordinate ξ e η variano da 0 a ∞; le superfici ξ = costante e η = costante rappresentano, come è facile verificare, due famiglie di paraboloidi di rivoluzione (con l'asse z come asse di simmetria). La relazione (48,10) si può esprimere in un'altra forma introducendo il raggio

$$r = \sqrt{z^2 + \rho^2} = \frac{1}{2}(\xi + \eta). \quad (48,11)$$

Si ha allora:

$$\xi = r + z, \quad \eta = r - z. \quad (48,12)$$

Esprimiamo la funzione di Lagrange di un punto materiale in coordinate ξ, η, φ. Derivando l'espressione (48,10) rispetto al tempo e sostituendo il risultato in

$$L = \frac{m}{2}(\dot\rho^2 + \rho^2\dot\varphi^2 + \dot z^2) - U(\rho, \varphi, z)$$

(funzione di Lagrange in coordinate cilindriche), si ottiene:

$$L = \frac{m}{8}(\xi + \eta)\left(\frac{\dot\xi^2}{\xi} + \frac{\dot\eta^2}{\eta}\right) + \frac{m}{2}\xi\eta\dot\varphi^2 - U(\xi, \eta, \varphi). \quad (48.13)$$

Gli impulsi sono

$$p_\xi = \frac{m}{4\xi}(\xi + \eta)\dot\xi, \quad p_\eta = \frac{m}{4\eta}(\xi + \eta)\dot\eta, \quad p_\varphi = m\xi\eta\dot\varphi$$

e la funzione di Hamilton è

$$H = \frac{2}{m}\frac{\xi p_\xi^2 + \eta p_\eta^2}{\xi+\eta} + \frac{p_\varphi^2}{2m\xi\eta} + U(\xi, \eta, \varphi). \tag{48,14}$$

I casi fisicamente interessanti di separazione delle variabili in queste coordinate sono quelli in cui l'energia potenziale ha la forma

$$U = \frac{a(\xi)+b(\eta)}{\xi+\eta} = \frac{a(r+z)+b(r-z)}{2r}. \tag{48,15}$$

Si ha allora l'equazione

$$\frac{2}{m(\xi+\eta)}\left[\xi\left(\frac{\partial S_0}{\partial\xi}\right)^2 + \eta\left(\frac{\partial S_0}{\partial\eta}\right)^2\right] + \frac{1}{2m\xi\eta}\left(\frac{\partial S_0}{\partial\varphi}\right)^2 + \frac{a(\xi)+b(\eta)}{\xi+\eta} = E.$$

La coordinata ciclica φ si separa in un termine del tipo $p_\varphi\varphi$. Moltiplicando quindi l'equazione per $m(\xi+\eta)$ e raggruppando i termini, otteniamo:

$$2\xi\left(\frac{\partial S_0}{\partial\xi}\right)^2 + ma(\xi) - mE\xi + \frac{p_\varphi^2}{2\xi} +$$
$$+ 2\eta\left(\frac{\partial S_0}{\partial\eta}\right)^2 + mb(\eta) - mE\eta + \frac{p_\varphi^2}{2\eta} = 0.$$

Ponendo

$$S_0 = p_\varphi\varphi + S_1(\xi) + S_2(\eta),$$

otteniamo le due equazioni

$$2\xi\left(\frac{dS_1}{d\xi}\right)^2 + ma(\xi) - mE\xi + \frac{p_\varphi^2}{2\xi} = \beta,$$
$$2\eta\left(\frac{dS_2}{d\eta}\right)^2 + mb(\eta) - mE\eta + \frac{p_\varphi^2}{2\eta} = -\beta$$

la cui integrazione ci dà in definitiva:

$$S = -Et + p_\varphi\varphi + \int\sqrt{\frac{mE}{2} + \frac{\beta}{2\xi} - \frac{ma(\xi)}{2\xi} - \frac{p_\varphi^2}{4\xi^2}}\,d\xi +$$
$$+ \int\sqrt{\frac{mE}{2} - \frac{\beta}{2\eta} - \frac{mb(\eta)}{2\eta} - \frac{p_\varphi^2}{4\eta^2}}\,d\eta \tag{48,16}$$

con p_φ, β, E come costanti arbitrarie.

3. *Coordinate ellittiche.* Queste coordinate ξ, η, φ vengono introdotte secondo le formule

$$\rho = \sigma\sqrt{(\xi^2-1)(1-\eta^2)}, \quad z = \sigma\xi\eta. \tag{48,17}$$

La costante σ è il parametro della trasformazione. La coordinata ξ prende tutti i valori fra 1 e ∞, e la coordinate η fra -1 e $+1$. Si possono ottenere relazioni geometricamente piú concrete, se si introducono le distanze r_1 ed r_2 rispettivamente dai punti A_1 ed A_2 sul-

l'asse z avente come coordinate $z = \sigma$ e $z = -\sigma$[1]):

$$r_1 = \sqrt{(z-\sigma)^2 + \rho^2}, \quad r_2 = \sqrt{(z+\sigma)^2 + \rho^2}.$$

Sostituendovi le espressioni (48,17), otteniamo:

$$\begin{gathered} r_1 = \sigma(\xi - \eta), \quad r_2 = \sigma(\xi + \eta), \\ \xi = \frac{r_2 + r_1}{2\sigma}, \quad \eta = \frac{r_2 - r_1}{2\sigma}. \end{gathered} \tag{48,18}$$

Trasformando la funzione di Lagrange dalle coordinate cilindriche a quelle ellittiche, troviamo:

$$\begin{aligned} L = \frac{m\sigma^2}{2}(\xi^2 - \eta^2)\left(\frac{\dot{\xi}^2}{\xi^2 - 1} + \frac{\dot{\eta}^2}{1 - \eta^2}\right) + \\ + \frac{m\sigma^2}{2}(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)\dot{\varphi}^2 - U(\xi, \eta, \varphi). \end{aligned} \tag{48,19}$$

Per la funzione di Hamilton otteniamo

$$\begin{aligned} H = \frac{1}{2m\sigma^2(\xi^2 - \eta^2)}\Big[(\xi^2 - 1)p_\xi^2 + (1 - \eta^2)p_\eta^2 + \\ + \left(\frac{1}{\xi^2 - 1} + \frac{1}{1 - \eta^2}\right)p_\varphi^2\Big] + U(\xi, \eta, \varphi). \end{aligned} \tag{48,20}$$

I casi fisicamente interessanti di separazione delle variabili corrispondono all'energia potenziale della forma:

$$U = \frac{a(\xi) + b(\eta)}{\xi^2 - \eta^2} = \frac{\sigma^2}{r_1 r_2}\left\{a\left(\frac{r_2 + r_1}{2\sigma}\right) + b\left(\frac{r_2 - r_1}{2\sigma}\right)\right\}, \tag{48,21}$$

dove $a(\xi)$ e $b(\eta)$ sono funzioni arbitrarie. Il risultato della separazione delle variabili nell'equazione di Hamilton-Jacobi ci dà:

$$\begin{aligned} S = -Et + p_\varphi\varphi + \int\sqrt{2m\sigma^2 E + \frac{\beta - 2m\sigma^2 a(\xi)}{\xi^2 - 1} - \frac{p_\varphi^2}{(\xi^2 - 1)^2}}\,d\xi + \\ + \int\sqrt{2m\sigma^2 E - \frac{\beta + 2m\sigma^2 b(\eta)}{1 - \eta^2} - \frac{p_\varphi^2}{(1 - \eta^2)^2}}\,d\eta. \end{aligned} \tag{48,22}$$

---

[1]) Le linee ξ = constante rappresentano una famiglia di ellissoidi

$$\frac{z^2}{\sigma^2\xi^2} + \frac{\rho^2}{\sigma^2(\xi^2 - 1)} = 1$$

i cui fuochi sono A_1 ed A_2, e le linee η = constante sono una famiglia di iperboloidi

$$\frac{z^2}{\sigma^2\eta^2} - \frac{\rho^2}{\sigma^2(1 - \eta^2)} = 1,$$

aventi gli stessi fuochi degli ellissoidi.

PROBLEMI

1. Trovare l'integrale completo dell'equazione di Hamilton-Jacobi per una particella in moto in un campo

$$U = \frac{\alpha}{r} - Fz$$

(sovrapposizione di un campo coulombiano e di un campo uniforme); trovare la funzione conservativa delle coordinate e degli impulsi, specifica per tale moto.

Soluzione. Il campo dato è del tipo (48,15) dove

$$a(\xi) = \alpha - \frac{F}{2}\xi^2, \quad b(\eta) = \alpha + \frac{F}{2}\eta^2.$$

L'integrale completo della equazione di Hamilton-Jacobi è dato dalla formula (48,16) con le funzioni $a(\xi)$ e $b(\eta)$ definite sopra.

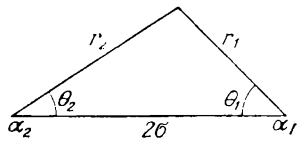


Fig. 55

Per determinare il significato della costante β, scriviamo le equazioni

$$2\xi p_\xi^2 + ma(\xi) - mE\xi + \frac{p_\varphi^2}{2\xi} = \beta,$$

$$2\eta p_\eta^2 + mb(\eta) - mE\eta + \frac{p_\varphi^2}{2\eta} = -\beta.$$

Sottraendo queste equazioni l'una dall'altra ed esprimendo gli impulsi $p_\xi = \partial S/\partial\xi$ e $p_\eta = \partial S/\partial\eta$ mediante $p_\rho = \partial S/\partial\rho$ e $p_z = \partial S/\partial z$ in coordinate cilindriche, otterremo dopo una semplice riduzione:

$$\beta = -m\left[\frac{\alpha z}{r} + \frac{p_\rho}{m}(zp_\rho - \rho p_z) + \frac{p_\varphi^2}{m\rho^2}z\right] - \frac{m}{2}F\rho^2.$$

L'espressione compresa tra parentesi quadre rappresenta l'integrale del moto, specifico per un campo puramente coulombiano [componente z del vettore (15,17)].

2. Risolvere il problema precedente per il caso di un campo:

$$U = \frac{\alpha_1}{r_1} + \frac{\alpha_2}{r_2}$$

(campo coulombiano con due centri fissi distanti 2σ l'uno dall'altro).

Soluzione. Il campo dato è del tipo (48,22) dove

$$a(\xi) = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{\sigma}\xi, \quad b(\eta) = \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\sigma}\eta.$$

La sostituzione di queste espressioni nella (48,22) ci dà l'azione $S(\xi, \eta, \varphi, t)$. Il significato della costante β viene determinato come nel problema 1; questa costante esprime, nel caso considerato, la conservazione della seguente

grandezza:

$$\beta = \sigma^2 \left(p_\rho^2 + \frac{p_\varphi^2}{\rho^2} \right) - M^2 + 2m\sigma\,(\alpha_1 \cos\theta_1 + \alpha_2 \cos\theta_2),$$

dove

$$M^2 = [\mathbf{rp}]^2 = p_\rho^2 z^2 + p_z^2 \rho^2 + \frac{r^2 p_\varphi^2}{\rho^2} - 2z\rho p_z p_\rho$$

e θ_1 e θ_2 sono gli angoli indicati nella fig. 55.

§ 49. *Invarianti adiabatici*

Consideriamo un sistema meccanico animato da un moto unidimensionale finito e caratterizzato da un parametro λ che determina le proprietà del sistema stesso o del campo esterno nel quale esso si trova[1]).

Supponiamo che sotto l'influsso di certe cause esterne, il parametro λ vari lentamente (ossia *adiabaticamente*) con il tempo. Per variazione « lenta » intendiamo una variazione per cui λ cambia poco in un periodo T del moto del sistema:

$$T = \frac{d\lambda}{dt} \ll \lambda. \tag{49,1}$$

Se λ fosse costante, il sistema sarebbe isolato e compirebbe un moto strettamente periodico con energia E costante e con periodo $T(E)$ ben determinato. Per λ variabile, il sistema non è isolato e la sua energia non si conserva. Nell'ipotesi che λ vari lentamente, anche la velocità $\dot{E}$ di variazione dell'energia deve essere piccola. Prendendo la media di questa velocità rispetto al periodo T ed attenuando quindi le sue oscillazioni « veloci », otterremo un valore $\overline{\dot{E}}$ che determinerà la velocità della sistematica e lenta variazione dell'energia del sistema; si può affermare che questa velocità è proporzionale alla velocità λ di variazione del parametro $\dot{\lambda}$. In altri termini, la grandezza E, che varia lentamente nel senso indicato sopra, si comporterà come una funzione di λ. La dipendenza di E da λ può essere rappresentata sotto forma di una combinazione di E e λ. Questa quantità che resta costante durante il moto di un sistema con parametri lentamente varianti, è detta *invariante adiabatico*.

Sia $H(q, p; \lambda)$ la funzione hamiltoniana del sistema, dipendente dal parametro λ. Secondo la (40,5), la velocità di variazione del sistema è

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial \lambda}\frac{d\lambda}{dt}. \tag{49,2}$$

---

[1]) Per brevità, supponiamo che ci sia un solo parametro di questo tipo; tutti i risultati però restano validi anche per un numero qualsiasi di parametri.

L'espressione al secondo membro della formula dipende non soltanto dalla variabile λ che varia lentamente, ma anche dalle variabili q e p che variano rapidamente. Per rendere evidente la variazione sistematica dell'energia che ci interessa, è necessario, come è stato indicato sopra, prendere la media dell'uguaglianza (49,2) rispetto a un periodo del moto. Tenendo conto della lentezza di variazione di λ (e anche di $\dot{\lambda}$), si può portare λ fuori dal segno di media:

$$\overline{\frac{dE}{dt}} = \frac{d\lambda}{dt}\,\overline{\frac{\partial H}{\partial \lambda}} \tag{49,3}$$

e, mediando la funzione $\partial H/\partial\lambda$, si può considerare come grandezze variabili solo q e p, e non λ. In altri termini, la media è fatta per quel moto del sistema che avrebbe luogo se λ fosse costante.

Scriviamo la media in forma esplicita

$$\overline{\frac{\partial H}{\partial \lambda}} = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{\partial H}{\partial \lambda}\,dt.$$

Secondo l'equazione di Hamilton $\dot{q} = \partial H/\partial p$, si ha:

$$dt = \frac{dq}{\partial H/\partial p}.$$

Con l'aiuto di questa uguaglianza sostituiamo l'integrazione rispetto al tempo con una integrazione rispetto alla coordinata, riscrivendo inoltre il periodo T nella forma

$$T = \int_0^T dt = \oint \frac{dq}{\partial H/\partial p}, \tag{49,4}$$

dove il simbolo $\oint$ indica l'integrazione rispetto alla variazione completa (« andata » e « ritorno ») della coordinata in un periodo[1]). In tal modo la (49,3) assume la forma:

$$\overline{\frac{dE}{dt}} = \frac{d\lambda}{dt}\,\frac{\oint \frac{\partial H/\partial\lambda}{\partial H/\partial p}\,dq}{\oint \frac{dq}{\partial H/\partial p}}. \tag{49,5}$$

Come è già stato indicato, le integrazioni in questa formula vanno eseguite lungo la traiettoria del moto, per la quale λ resta costante. Lungo questa traiettoria la funzione di Hamilton mantiene un valore costante E, e l'impulso è una deferminata funzione della coordinata variabile q e dei due parametri indipendenti costanti E e λ. Considerando proprio l'impulso come

[1]) Se il moto del sistema rappresenta una rotazione e se la coordinata q è l'angolo di rotazione φ, l'integrazione rispetto a $d\varphi$ deve essere eseguita su un « giro completo », cioè da 0 a 2π)

una tale funzione $p\ (q;\ E,\ \lambda)$ e derivando l'uguaglianza $H\ (p,\ q;\ \lambda) = E$ rispetto al parametro λ, otteniamo:

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda} + \frac{\partial H}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial \lambda} = 0$$

ossia

$$\frac{\partial H/\partial \lambda}{\partial H/\partial p} = -\frac{\partial p}{\partial \lambda}.$$

Portando questo risultato nell'integrale a numeratore nella (49,5) e scrivendo in quello a denominatore la funzione integranda nella forma $\partial p/\partial E$, abbiamo:

$$\overline{\frac{\partial E}{\partial t}} = -\frac{\partial \lambda}{\partial t}\frac{\oint \frac{\partial p}{\partial \lambda}\,dq}{\oint \frac{\partial p}{\partial E}\,dq}$$

o

$$\oint \left(\frac{\partial p}{\partial E}\overline{\frac{dE}{dt}} + \frac{\partial p}{\partial \lambda}\frac{d\lambda}{dt}\right) dq = 0.$$

La forma definitiva di questa uguaglianza può essere scritta come segue:

$$\overline{\frac{dI}{dt}} = 0, \tag{49,6}$$

dove I è l'integrale

$$I = \frac{1}{2\pi}\oint p\,dq, \tag{49,7}$$

preso lungo la traiettoria, per la quale E e λ sono fissi. Questo risultato mostra che nell'approssimazione considerata la grandezza I, restando costante al variare del parametro λ, è un'invariante adiabatico.

La grandezza I è funzione dell'energia del sistema (e del parametro λ). La sua derivata parziale rispetto all'energia determina il periodo del moto: secondo la (49,4) abbiamo

$$2\pi\frac{\partial I}{\partial E} = \oint \frac{\partial p}{\partial E}\,dq = T \tag{49,8}$$

o anche

$$\frac{\partial E}{\partial I} = \omega, \tag{49,9}$$

dove $\omega = 2\pi/T$ è la frequenza delle oscillazioni del sistema.

All'integrale (49,7) si può dare un significato geometrico concreto utilizzando la nozione di traiettoria di fase del sistema. Nel caso dato (un solo grado di libertà), lo spazio delle fasi si riduce ad un sistema bidimensionale di coordinate p, q, e la traiettoria di fase di un sistema, il cui moto è periodico, è rappresentata da una curva chiusa in questo

piano. L'integrale (49,7), preso lungo questa curva, dà il valore dell'area della superficie da essa limitata. Esso può essere anche scritto come un integrale bidimensionale di superficie:

$$I = \frac{1}{2\pi} \int dp\, dq. \tag{49,10}$$

A titolo d'esempio, determiniamo l'invariante adiabatico per un oscillatore unidimensionale. La sua hamiltoniana è

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 q^2}{2}, \tag{49,11}$$

dove ω è la frequenza propria dell'oscillatore. L'equazione della traiettoria di fase, data dalla legge di conservazione dell'energia

$$H(p, q) = E,$$

rappresenta un'ellisse di semiassi $\sqrt{2mE}$ e $\sqrt{2E/m\omega^2}$; la sua superficie (divisa per 2π) è

$$I = \frac{E}{\omega}. \tag{49,12}$$

L'invarianza adiabatica di questa grandezza significa che per una lenta variazione dei parametri dell'oscillatore la sua energia varia proporzionalmente alla frequenza.

§ 50. *Variabili canoniche*

Supponiamo ora costante il parametro λ, consideriamo cioè un sistema isolato.

Facciamo le trasformazioni canoniche delle variabili q, p, scegliendo la grandezza I come nuovo « impulso ». In queste trasformazioni il ruolo della funzione generatrice deve essere assunto dall'« azione abbreviata » S_0 espressa in funzione di q e I. Infatti, S_0 è definita come integrale

$$S_0(q, E; \lambda) = \int p(q, E; \lambda)\, dq, \tag{50,1}$$

preso per un valore dato dell'energia E (e del parametro λ). Per un sistema isolato, però, I è funzione solo dell'energia; S_0 può essere quindi espressa come funzione di $S_0(q, I; \lambda)$, mentre la derivata parziale $(\partial S_0/\partial q)_E = p$ coincide con la derivata $(\partial S_0/\partial q)_I$, presa per I costante. Si ha quindi

$$p = \frac{\partial S_0(q, I; \lambda)}{\partial q}, \tag{50,2}$$

il che corrisponde alla prima delle formule della trasformazione canonica (45,8). La seconda formula invece determinerà una nuova « coor-

dinata » che indicheremo con w:

$$w = \frac{\partial S_0 (q, I; \lambda)}{\partial I}. \tag{50,3}$$

Le variabili I e w sono dette *variabili canoniche*; I si chiama *variabile d'azione*, e w, *variabile angolare*. Non dipendendo la funzione generatrice $S_0 (q, I; \lambda)$ dal tempo in modo esplicito, la nuova funzione di Hamilton H' coincide con la vecchia H espressa in nuove coordinate. In altre parole, H' è l'energia $E (I)$ espressa in funzione della variabile d'azione. Conformemente a ciò le equazioni di Hamilton per le variabili canoniche possono essere scritte nella forma:

$$\dot{I} = 0, \quad \dot{w} = \frac{dE (I)}{dI}. \tag{50,4}$$

Dalla prima equazione, come c'era da aspettarsi, risulta che $I =$ costante: alla pari dell'energia è costante anche la I. Dalla seconda equazione si vede che la variabile angolare è una funzione lineare del tempo:

$$w = \frac{dE}{dt} t + \text{costante} = \omega (I) t + \text{costante} \tag{50,5}$$

che rappresenta la fase delle oscillazioni.

L'azione $S_0 (q, I)$ è una funzione non monodroma delle coordinate. A ogni periodo questa funzione non riprende il valore iniziale, ma subisce un incremento

$$\Delta S_0 = 2\pi I, \tag{50,6}$$

cosa evidente dalla (50,1) e dalla definizione (49,7) di I. In questo stesso intervallo la variabile angolare subisce l'incermento

$$\Delta w = \Delta \frac{\partial S_0}{\partial I} = \frac{\partial}{\partial I} \Delta S_0 = 2\pi. \tag{50,7}$$

Procedendo inversamente, se esprimiamo q e p [oppure qualsiasi loro funzione monodroma $F (q, p)$] mediante le variabili canoniche, queste funzioni non cambieranno i loro valori quando $\bar{w}$ varierà di 2π (per un valore I dato). In altri termini, ogni funzione monodroma $F (q, p)$, espressa mediante le variabili canoniche, rappresenta una funzione periodica di w con periodo uguale a 2π.

Le equazioni del moto possono essere scritte in variabili canoniche anche per un sistema non isolato con un parametro λ dipendente dal tempo. Il passaggio a queste variabili viene fatto sempre con le formule (50,2) e (50,3), avendo per funzione generatrice S_0, definita dall'integrale (50,1) ed espressa in funzione della variabile I, definita dall'integrale (49,7). L'integrale indefinito (50,1) e l'integrale definito (49,7) vengono calcolati come se il parametro $\lambda (t)$ avesse un valore costante dato; in altre parole, $S_0 (q, I; \lambda (t))$ è la funzione

del caso precedente, calcolata per λ costante che viene sostituita poi dalla funzione data $\lambda(t)$ [1]).

Poiché la funzione generatrice si presenta ora (con il parametro λ) come funzione esplicita del tempo, la nuova funzione di Hamilton H' non coinciderà piú con la vecchia, cioè con l'energia $E(I)$. Secondo le formule generali della trasformazione canonica (45,8), si ha

$$H' = E(I;\ \lambda) + \frac{\partial S_0}{\partial t} = E(I;\ \lambda) + \Lambda\dot{\lambda}, \tag{50,8}$$

dove è stata introdotta la notazione

$$\Lambda = \left(\frac{\partial S_0}{\partial \lambda}\right)_{q,\,I}; \tag{50,9}$$

Λ deve essere espressa (dopo aver fatto la derivazione rispetto a λ) con l'aiuto della (50,3) in funzione di I e w.

Le equazioni di Hamilton assumono ora la forma

$$\dot{I} = -\frac{\partial H'}{\partial w} = -\left(\frac{\partial \lambda}{\partial w}\right)_{I,\,\lambda}\dot{\lambda}, \tag{50,10}$$

$$\dot{\omega} = \frac{\partial H'}{\partial I} = \omega(I;\ \lambda) + \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial I}\right)_{w,\,\lambda}\dot{\lambda}, \tag{50,11}$$

dove $\omega = (\partial E/\partial I)_\lambda$ è la frequenza delle oscillazioni (calcolata di nuovo come se λ fosse costante).

PROBLEMA

Scrivere le equazioni del moto in variabili canoniche per un oscillatore armonico [funzione di Hamilton (49,11)] con una frequenza dipendente dal tempo.

Soluzione. Poiché nelle (50,1) — (50,3) tutte le azioni vengono eseguite per λ constante (qui il suo ruolo è assunto dalla stessa frequenza ω), la relazione tra q, p e w ha la stessa forma che per la frequenza costante (quando $w = \omega t$):

$$q = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}}\,\mathrm{sen}\,w = \sqrt{\frac{2I}{m\omega}}\,\mathrm{sen}\,w, \quad p = \sqrt{2I\omega m}\cos w.$$

Da cui

$$S_0 = \int p\,dq = \int p\left(\frac{\partial q}{\partial w}\right)_{I,\,\omega} dw = 2I\int \cos^2 w\,dw$$

e in seguito

$$\Lambda = \left(\frac{\partial S_0}{\partial \omega}\right)_{q,\,I} = \left(\frac{\partial S_0}{\partial w}\right)_I \left(\frac{\partial w}{\partial \omega}\right)_q = \frac{I}{2\omega}\,\mathrm{sen}\,2w.$$

Le equazioni (50,10), (50,11) assumono ora la forma

$$\dot{I} = -I\frac{\dot{\omega}}{\omega}\cos 2w, \quad \dot{w} = \omega + \frac{\dot{\omega}}{2\omega}\,\mathrm{sen}\,2w.$$

---

[1]) Sottolineiamo tuttavia che la funzione S_0 cosí determinata non coincide con la reale azione abbreviata per un sistema con la funzione hamiltoniana dipendente dal tempo!

§ 51. *Conservazione di un'invariante adiabatico*[1])

L'equazione del moto nella forma (50,10) permette di verificare nuovamente l'invarianza adiabatica della variabile d'azione.

$S_0(q, I; \lambda)$ è una funzione non monodroma di q; quando la coordinata prende il valore iniziale, ad S_0 si aggiunge un valore intero multiplo di $2\pi I$. La derivata (50,9) è invece una funzione monodroma perché la derivazione si fa per I costante ed, inoltre, gli incrementi che si aggiungono ad S_0 scompaiono. Come ogni funzione monodroma, la funzione Λ, espressa mediante la variabile angolare w, è funzione periodica di questa variabile. Il valore medio (per un periodo) della derivata $d\Lambda/dw$ di una tale funzione si annulla. Per questo, prendendo la media dell'equazione (50,10) e portando $\dot{\lambda}$ (per una variazione lenta di λ) fuori del segno di media, si ottiene il risultato richiesto:

$$\dot{I} = -\overline{\left(\frac{\partial\Lambda}{\partial w}\right)_I}\,\dot{\lambda} = 0, \tag{51,1}$$

come volevasi dimostrare.

Le equazioni del moto (50,10) e (50,11) permettono di affrontare il problema della precisione con la quale si conserva l'invariante adiabatico. Poniamo la questione nel modo seguente: supponiamo che il parametro $\lambda(t)$ tenda per $t \to -\infty$ e $t \to +\infty$ ai limiti costanti λ_- e λ_+; sia dato (per $t = -\infty$) il valore iniziale I_- dell'invariante adiabatico; si chiede di trovare l'incremento $\Delta I = I_+ - I_-$ nel momento $t = +\infty$.

Dalla (50,10) si ricava

$$\Delta I = -\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial\Lambda}{\partial w}\dot{\lambda}\,dt. \tag{51,2}$$

Come abbiamo già indicato, la grandezza Λ è una funzione periodica (con periodo 2π) della variabile w; sviluppando in serie di Fourier questa funzione, abbiamo:

$$\Lambda = \sum_{l=-\infty}^{\infty} e^{ilw}\Lambda_l \tag{51,3}$$

(essendo Λ reale, i coefficienti di sviluppo sono legati dalla relazione $\Lambda_{-l} = \Lambda_l^*$). Dalla (51,3) per la derivata $d\lambda/dw$ otteniamo:

$$\frac{\partial\Lambda}{\partial w} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} ile^{ilw}\Lambda_l = 2\,\mathrm{Re}\sum_{l=1}^{\infty} ile^{ilw}\Lambda_l. \tag{51,4}$$

Per $\dot{\lambda}$ sufficientemente piccolo, la derivata $\dot{w}$ è positiva [il suo segno coincide con quello di ω; vedi la (50,11)], cioè w è una funzione

[1]) Questo paragrafo è stato scritto da E. M. Lifšic e L. P. Pitaievskij.

monotona del tempo t. Se nella (51,2) si passa dall'integrazione rispetto a dt all'integrazione rispetto a dw, i limiti restano gli stessi:

$$\Delta I = -\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \Lambda}{\partial w} \frac{d\lambda}{dt} \frac{dt}{dw} dw. \tag{51,5}$$

Sostituendo con l'espressione (51,4), trasformiamo l'integrale, considerando formalmente in esso w come variabile complessa. Supponendo che l'espressione integranda non abbia punti singolari per valori reali di w, spostiamo il cammino d'integrazione dall'asse reale w al semipiano superiore di questa variabile. Fatto questo, si vede che il contorno «si attacca» ai punti singolari dell'espressione integranda e, aggirandoli, assume la forma rappresentata schematicamente nella fig. 56. Sia w_0 il punto singolare piú vicino all'asse reale, cioè il punto con la coordinata immaginaria (positiva) minore. L'integrale (51,5) assume il suo valore principale nell'intorno di questo punto; notiamo che ciascun termine della serie (51,4) apporta un contributo contenente il fattore $\exp(-l \operatorname{Im} w_0)$. Conservando ora soltanto il termine con l'esponente negativo minore in valore assoluto (cioè il termine con $l = 1$), troviamo[1])

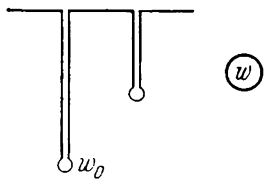


Fig. 56

$$\Delta I \backsim \exp(-\operatorname{Im} w_0). \tag{51,6}$$

Sia t_0 il «momento di tempo» (numero complesso!) che corrisponde al punto singolare w_0: $w(t_0) = w_0$. Per ordine di grandezza $|t_0|$ coincide generalmente con il tempo caratteristico della variazione dei parametri del sistema che indicheremo con τ[2]). L'ordine di grandezza dell'esponente di potenza nella (51,6) sarà

$$\operatorname{Im} w_0 \sim \omega\tau \sim \frac{\tau}{T}. \tag{51,7}$$

Poiché, per ipotesi, $\tau \gg T$, questo esponente è grande. Quindi, la differenza $I_+ - I_-$ decresce esponenzialmente con la diminuzione della rapidità della variazione dei parametri del sistema[3])

[1]) In casi speciali può risultare che lo sviluppo (51,4) non contenga il termine con $l = 1$ (vedi, ad esempio, il problema di questo paragrafo); in tutti i casi bisogna prendere il termine con il valore minore di l della serie.

[2]) Se la lentezza della variazione del parametro χ si esprime nel fatto che questi dipende da t soltanto nella forma $\xi = t/\tau$, dove τ è grande, allora $t_0 = \tau\xi_0$, dove ξ_0 è il punto singolare della funzione $\lambda(\xi)$, non dipendente da τ).

[3]) Notiamo che se i valori iniziale e finale della funzione $\lambda(t)$ coincidono ($\lambda_+ = \lambda_-$), non solamente la differenza ΔI, ma anche la differenza $\Delta E = E_+ - E_-$ dell'energia finale ed iniziale sarà esponenzialmente piccola; secondo la (49,9), avremo $\Delta E = \omega \Delta I$.

Per determinare w_0 in prima approssimazione rispetto a T/τ (cioè conservando nell'esponente solamente il termine $\sim (T/\tau)^{-1}$), si può omettere nell'equazione (50,11) il termine piccolo contenente λ, cioè scrivere

$$\frac{dw}{dt} = \omega(I, \lambda(t)), \tag{51,8}$$

considerando costante, ponendolo per esempio uguale a I_-, l'argomento I della funzione $\omega(I, \lambda)$. Allora abbiamo:

$$w_0 = \int^{t_0} \omega(I, \lambda(t))\, dt \tag{51,9}$$

(per limite inferiore si può prendere qualsiasi valore reale di t; la parte immaginaria di w_0 che ci interessa non dipende da questa scelta).

L'integrale (51,5) con $\dot{w}$ determinato dalla (51,8) (e con un termine della serie (51,4) per $\partial\Lambda/\partial w$) assume la forma

$$\Delta I \backsim \mathrm{Re} \int i e^{iw} \frac{\dot{\lambda}\, dw}{\omega(I, \lambda)}. \tag{51,10}$$

Da questa espressione si vede che in qualità di punti singolari concorrenti (quando si sceglie il piú vicino all'asse reale) figurano le singolarità (poli, punti di ramificazione) delle funzioni $\dot{\lambda}(t)$ e $1/\omega(t)$. Ricordiamo a questo proposito che il valore esponenzialmente piccolo di ΔI è una consequenza dell'ipotesi che le funzioni indicate non abbiano punti singolari reali.

PROBLEMA

Valutare ΔI per un oscillatore armonico con frequenza che varia lentamente secondo la legge

$$\omega^2 = \omega_0^2 \frac{1 + a e^{\alpha t}}{1 + e^{\alpha t}}$$

dal valore $\omega_- = \omega_0$ per $t = -\infty$ al valore $\omega_+ = \sqrt{a}\omega_0$ per $t = \infty$ ($a > 0$, $\alpha \ll \omega_0$)[1].

Soluzione. Prendendo come parametro λ la stessa frequenza ω, abbiamo

$$\frac{\dot{\lambda}}{\omega} = \frac{\alpha}{2}\left(\frac{a}{e^{-\alpha t} + a} - \frac{1}{e^{-\alpha t} + 1}\right).$$

Questa funzione ha poli per $e^{-\alpha t} = -1$ ed $e^{-\alpha t} = -a$. Calcolando l'integrale $\int \omega dt$, troviamo che il valore minimo $\mathrm{Im}\, w_0$ è dato da uno dei poli $\alpha t_0 = -\ln(-a)$ ed è uguale a

$$\mathrm{Im}\, w_0 = \begin{cases} \omega_0 \pi/\alpha & \text{per } a > 1, \\ \omega_0 \pi \sqrt{a}/\alpha & \text{per } a < 1. \end{cases}$$

[1]) L'armonicità dell'oscillatore si rivela nell'indipendenza della frequenza delle oscillazioni dall'energia.

Per un oscillatore armonico $\Lambda \backsim \operatorname{sen} 2w$ (vedi problema del § 50), per cui la serie (51,3) si riduce a due termini (con $l = \pm 2$). Per l'oscillatore armonico si ha quindi

$$\Delta I \backsim \exp(-2 \operatorname{Im} w_0).$$

§ 52. *Moto condizionatamete periodico*

Consideriamo un sistema isolato con molti gradi di libertà, animato da un moto finito (rispetto a tutte le coordinate). Supponiamo inoltre che il problema ammetta una completa separazione delle variabili nel metodo di Hamilton-Jacobi. Ciò vuol dire che con una scelta appropriata delle coordinate l'azione abbreviata può essere rappresentata come somma:

$$S_0 = \sum_i S_i(q_i) \tag{52,1}$$

di funzioni, ognuna delle quali dipende da una sola coordinata.

Poiché gli impulsi generalizzati sono

$$p_i = \frac{\partial S_0}{\partial q_i} = \frac{dS_i}{dq_i},$$

ognuna delle funzioni S_i può essere rappresentata nella forma

$$S_i = \int p_i \, dq_i. \tag{52,2}$$

Queste funzioni non sono monodrome. Poiché il moto è finito, ciascuna delle coordinate può prendere valori compresi in un determinato intervallo finito. Quando q_i varia in questo intervallo « andata » e « ritorno », l'azione subisce un incremento

$$\Delta S_0 = \Delta S_i = 2\pi I_i, \tag{52,3}$$

dove I_i è l'integrale

$$I_i = \frac{1}{2\pi} \oint p_i \, dq_i, \tag{52,4}$$

esteso alla variazione indicata di q_i[1]).

Facciamo ora una trasformazione canonica analoga a quella fatta nel paragrafo precedente per il caso di un solo grado di libertà. Le variabili nuove saranno qui le « variabili d'azione » I_i e le « variabili angolari »

$$w_i = \frac{\partial S_0(q, I)}{\partial I_i} = \sum_k \frac{\partial S_k(q_k, I)}{\partial I_i}, \tag{52,5}$$

[1]) Sottolineiamo però che si tratta qui di una variazione formale della coordinata q_i in tutto l'intervallo dei suoi valori possibili, e non della variazione nel corso di un periodo del moto reale (come nel caso del moto unidimensionale). Il moto reale finito di un sistema con piú gradi di libertà non è in generale periodico nel suo insieme; non è periodica nemmeno la variazione col tempo di ciascuna delle sue coordinate prese separatamente (vedi piú avanti).

dove la funzione generatrice è ancora l'azione espressa in funzione delle coordinate e delle grandezze I_i: le equazioni del moto espresse in queste variabili

$$\dot{I}_i = 0, \quad \dot{w}_i = \frac{\partial E(I)}{\partial I_i}$$

danno:

$$I_i = \text{costante}. \tag{52.6}$$

$$w_i = \frac{\partial E(I)}{\partial I_i} t + \text{costante}. \tag{52,7}$$

Analogamente alla (52,7), si può trovare che alla variazione completa della coordinata q_i (« andata » e « ritorno ») corrisponde una variazione di 2π della variabile w_i:

$$\Delta w_i = 2\pi. \tag{52,8}$$

In altri termini, le grandezze w_i (q, I) sono funzioni non monodrome delle coordinate; quando le coordinate variano riprendendo i valori iniziali, queste funzioni possono variare di un qualsiasi multiplo intero di 2π. Questa proprietà può essere formulata per la funzione w_i (q, p) (espressa mediante le coordinate e gli impulsi) anche nello spazio delle fasi del sistema. Poiché le grandezze stesse I_i, se espresse mediante p e q, sono funzioni monodrome di queste variabili, con la sostituzione di I_i (p, q) in w_i (q, I) otteniamo una funzione w_i (p, q) che percorrendo una curva chiusa qualsiasi nello spazio delle fasi, può variare di un multiplo intero di 2π (o di zero).

Da quanto detto segue che ogni funzione monodroma dello stato del sistema $F(p, q)$[1]), espressa mediante le variabili canoniche, è una funzione periodica delle variabili angolari con periodo 2π per ciascuna di queste variabili. Essa può quindi essere sviluppata in una serie multipla di Fourier del tipo

$$F = \sum_{l_1=-\infty}^{\infty} \cdots \sum_{l_s=-\infty}^{\infty} A_{l_1 l_2 \ldots l_s} e^{i(l_1 w_1 + \ldots + l_s w_s)}$$

($l_1, l_2, \ldots, l_s$ sono numeri interi). Sostituendovi le variabili angolari come funzioni del tempo, vediamo che la dipendenza temporale di F è data da una somma del tipo

$$F = \sum_{l_1=-\infty}^{\infty} \cdots \sum_{l_s=-\infty}^{\infty} A_{l_1 l_2 \ldots l_s} \exp\left\{ it \left(l_1 \frac{\partial E}{\partial I_1} + \ldots + l_s \frac{\partial E}{\partial I_s} \right) \right\}. \tag{52,9}$$

---

[1]) Le « coordinate rotazionali », ossia gli angoli φ (vedi nota alla pag. 224), non sono legate univocamente allo stato del sistema, perché i valori di φ, che differiscono per un multiplo intero di 2π, corrispondono ad uno stesso stato del sistema. Se tra le coordinate q ci sono di questi angoli, essi possono quindi entrare nella funzione $F(q, p)$ soltanto come espressioni del tipo $\cos\varphi$ o $\operatorname{sen}\varphi$, legate univocamente allo stato del sistema.

Ciascun termine di questa somma rappresenta una funzione periodica del tempo con frequenza

$$l_1\omega_1 + \ldots + l_s\omega_s, \tag{52,10}$$

che è una somma di multipli interi delle frequenze fondamentali

$$\omega_i = \frac{\partial E}{\partial I_i}. \tag{52,11}$$

Poiché tutte le frequenze (52,10) non sono generalmente multipli interi (o frazioni razionali) di alcuna di esse, la somma in totale non è una vera e propria funzione periodica. In particolare, questo vale per le coordinate q e gli impulsi p del sistema.

Quindi il moto del sistema non è in generale strettamente periodico né in blocco né rispetto a una sua coordinata. Ciò significa che se il sistema è passato per un certo stato, non ripassa piú per quello stato in capo a nessun intervallo di tempo finito. Si può, però, affermare che in capo a un intervallo di tempo sufficientemente grande passa tanto vicino quanto si vuole a quello stato. È rifacendosi a questa proprietà che un tale moto è chiamato *condizionatamente periodico*.

In certi casi particolari, due o piú frequenze fondamentali ω_i possono risultare commensurabili (per valori arbitrari delle grandezze I_i). Si parla allora della presenza di una *degenerazione*; se invece tutte le s frequenze sono commensurabili, il moto del sistema è chiamato *completamente degenere*. Nell'ultimo caso è evidente che il moto è strettamente periodico e, di conseguenza, le traiettorie di tutte le particelle sono chiuse.

La presenza di una degenerazione fa diminuire soprattutto il numero di variabili indipendenti (I_i) dalle quali dipende l'energia del sistema. Supponiamo che due frequenze ω_1 e ω_2 siano legate dalla relazione

$$n_1 \frac{\partial E}{\partial I_1} = n_2 \frac{\partial E}{\partial I_2}, \tag{52,12}$$

dove n_1 ed n_2 sono numeri interi. Da questa uguaglianza segue che le grandezze I_1 edI_2 entrano nell'energia solo sotto forma di somma $n_2 I_1 + n_1 I_2$.

L'aumento del numero degli integrali del moto uniformi in confronto al loro numero nel caso generale di un sistema non degenere (con uno stesso numero di gradi di libertà) rappresenta una proprietà molto importante dei moti degeneri. Nell'ultimo caso, di tutti gli $(2s - 1)$ integrali del moto risultano monodrome solo s funzioni dello stato del sistema; il numero completo di tali funzioni può essere costituito ad esempio dalle s grandezze I_1. I restanti $s - 1$ integrali si possono rappresentare sotto forma delle differenze

$$w_i \frac{\partial E}{\partial I_k} - w_k \frac{\partial E}{\partial I_i}. \tag{52,13}$$

Queste grandezze, come segue direttamente dalla formula (52,7), sono costanti, ma non sono funzioni monodrome dello stato del sistema perché non sono monodrome le variabili angolari.

Con la degenerazione subentrano dei mutamenti. In forza della (52,12), l'integrale

$$w_1 n_2 - w_2 n_1 \tag{52,14}$$

non è uniforme, potendovi aggiungere un qualsiasi multiplo intero di 2π. È sufficiente quindi prendere una funzione trigonometrica di questa grandezza per ottenere un nuovo integrale uniforme del moto.

Il moto in un campo $U = -\alpha/r$ (vedi il problema di questo paragrafo) può servire d'esempio di un moto degenere. Ed è appunto questa circostanza a far comparire il nuovo caratteristico integrale uniforme del moto (15,17), oltre ai due già esistenti integrali uniformi ordinari (il moto si suppone piano): del momento M e dell'energia E, propri del moto in un qualsiasi campo centrale.

Notiamo anche che la comparsa di ulteriori integrali uniformi determina, a sua volta, un'altra proprietà dei moti degeneri: essi ammettono completa separazione delle variabili, qualunque sia la scelta delle coordinate[1]. Infatti, le grandezze I_i, espresse in coorpinate che permettono la separazione delle variabili, sono integrali uniformi del moto. Se si ha degenerazione, però, il numero degli integrali uniformi è maggiore di s e, di conseguenza, la scelta degli integrali che vogliamo prendere come I_i non è piú univoca.

A titolo d'esempio, consideriamo il moto kepleriano che ammette la separazione delle variabili in coordinate sia sferiche che in quelle paraboliche.

Nel paragrafo precedente abbiamo dimostrato che per un moto uniforme finito la variabile d'azione è un invariante adiabatico. Ciò vale anche per sistemi con molti gradi di libertà e ne diamo qui la dimostrazione generalizzando direttamente il metodo esposto all'inizio del § 51.

Per un sistema a piú dimensioni con il parametro variabile $\lambda(t)$, le equazioni del moto in coordinate canoniche danno per velocità di variazione di ciascuna delle variabili d'azione I_i un'espressione analoga alla (50,10):

$$\dot{I}_i = -\frac{\partial \Lambda}{\partial w_i}\,\dot{\lambda}, \tag{52,15}$$

dove, come prima, $\Lambda = (\partial S_0/\partial \lambda)_I$. Mediamo questa uguaglianza su un intervallo di tempo, grande in confronto ai periodi principali del sistema, ma piccolo in confronto al tempo necessario per una variazione sensibile del parametro $\lambda\,(t)$. Anche in questo caso $\dot{\lambda}$ si porta fuori del segno di media mentre la media delle derivate $\partial\Lambda/\partial w_i$ si

[1]) Non ci si riferisce naturalmente a trasformazioni banali delle coordinate tipo $q_1' = q_1'\,(q_1)$, $q_2' = q_2'\,(q_1)$.

prende come se il moto avvenisse per λ costante e fosse quindi un moto condizionatamente periodico. Λ si presenta allora come funzione monodroma periodica delle variabili angolari w_i, e le medie delle sue derivate $\partial\Lambda/\partial w_i$ si annullano.

Per concludere, facciamo qualche osservazione relativa alle proprietà del moto finito dei sistemi isolati a più (s) gradi di libertà per il caso piú generico in cui non è prevista la separazione delle variabili nella corrispondente equazione di Hamilton-Jacobi.

La proprietà fondamentale dei sistemi a variabili separabili è costituita dall'uniformità degli integrali del moto I_i il cui numero è uguale al numero dei gradi di libertà. Nel caso generale, invece, di sistemi a variabili non separabili, la scelta degli integrali del moto uniformi è limitata a quelli per cui il fatto di essere costanti è un'espressione delle proprietà di omogeneità e di isotropia dello spazio e del tempo, cioè delle leggi di conservazione dell'energia, dell'impulso, e del momento angolare.

La traiettoria di fase del sistema passa per quelle regioni dello spazio delle fasi che sono determinate da valori costanti dati degli integrali del moto uniformi. Per un sistema a variabili separabili avente s integrali uniformi, queste condizioni determinano una varietà a s dimensioni (ipersuperficie) dello spazio delle fasi. In un tempo sufficientemente lungo la traiettoria del sistema passa vicino tanto quanto si vuole a ogni punto di questa superficie.

Nei sistemi, invece, a variabili non separabili, aventi un numero minore di integrali uniformi (pur a parità di s), la traiettoria di fase riempie (completamente o parzialmente) regioni dello spazio delle fasi (varietà) con numero di dimensioni maggiore.

Osserviamo infine che se la hamiltoniana di un sistema differisce soltanto per termini piccoli da una funzione che ammette separazione delle variabili, anche le proprietà del moto sono vicine alle proprietà dei moti condizionatamente periodici, la differenza anzi è piccola in grado ben piú elevato di quanto non lo siano i termini addizionali nella funzione di Hamilton

PROBLEMA

Calcolare le variabili d'azione per il moto ellittico in un campo $U = -\alpha/r$.
Soluzione. In coordinate polari r, φ nel piano del moto abbiamo:

$$I_\varphi = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} p_\varphi\, d\varphi = M,$$

$$I_r = \frac{2}{2\pi}\int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \sqrt{2m\left(E+\frac{\alpha}{r}\right)-\frac{M^2}{r^2}}\, dr = -M+\alpha\sqrt{\frac{m}{2|E|}}.$$

Da cui l'energia espressa in funzione delle variabili d'azione è

$$E = -\frac{m\alpha^2}{2(I_r + I_\varphi)^2}.$$

Essa dipende solo dalla somma $I_r + I_\varphi$, il che significa che il moto è degenere: le due frequenze fondamentali (rispetto a φ ed r) coincidono.

I parametri p ed e dell'orbita [vedi (15,4)] si esprimono in funzione di I_r ed I_φ secondo le formule

$$p = \frac{I_\varphi^2}{m\alpha}, \quad e^2 = 1 - \left(\frac{I_\varphi}{I_\varphi + I_r}\right)^2.$$

In virtú dell'invarianza adiabatica delle grandezze I_r ed I_φ, l'eccentricità dell'orbita resta invariata quando il coefficiente α o la massa m variano lentamente, mentre le sue dimensioni variano in modo inversamente proporzionale ad m ed α.

Indice analitico[1])

Additività,
degli integrali del moto, 42
della massa, 47
Ampiezza delle oscillazioni, 100
Asse di istantanea rotazione, 150
Azione abbreviata, 205

Battimenti, 105, 114
Buca di potenziale, 58
Caduta di una particella nel centro, 67, 90

Campo omogeneo, 38
Condizione d'equilibrio di un solido,
Coordinate, cicliche, 64,
ellittiche, 220
generalizzate, 27
paraboliche, 219
Coppia di forze, 165

Decremento di smorzamento, 121
Degenerazione, 234

Eccentricità, 71
Energia, cinetica, 36
interna, 48
potenziale, 36
Equazioni, canoniche, 194
di Newton, 37

Fase, 100
Forza, 37
centrifuga, 189
di attrito, 121, 182
di Coriolis, 189
di reazione, 182
generalizzata, 46
Frequenza propria 110
Frequenze combinatorie, 135
Funzione, di dissipazione, 123
generatrice, 209

Gradi di libertà, 27, 116, 148
Grandezze canonicamente coniugate, 211

Identità di Jacobi, 199
Impulso generalizzato, 46
Integrale delle aree, 65
Integrali del moto, 42
Isotropia dello spazio, 32, 49

Legge dell'uguaglianza dell'azione e della reazione, 46
d'inerzia, 32
Leggi di Keplero, 55, 65
Linea dei nodi, 166

Massa di una particella, 34
Momento di una forza, 164
Momenti principali, d'inerzia, 153
dell'asse d'inerzia, 153
Moto finito e infinito, 58
traslatorio, 149

Nutazione, 170

---

[1]) Questo indice analitico completa l'indice generale del libro, senza però ripeterlo. Esso include concetti e termini che non entrano nell'indice generale.

Omogeneità, dello spazio, 44
del tempo, 43
Oscillatore spaziale, 115
Oscillazioni normali, 112
Ottica geometrica, 204

Pendolo,
di Foucault, 191
doppio, 39, 114
fisico, 157
piano, 39, 59, 69, 147
sferico, 68
Perielio, 75
Polodia, 175
Precessione regolare, 162
Principio di D'Alembert, 185
Problema dei due corpi, 62
Punto d'arresto, 58

Risonanza, 104
Rotatore, 154, 162
Rotolamento, 182

Sezione d'urto 88
Sistema conservativo, 43
inerziale di riferimento, 32
isolato, 36
Smorzamento aperiodico, 122
Spazio delle fasi, 212
Strisciamento, 182
Superficie assolutamente liscia, 183
ruvida, 183

Teorema,
del viriale, 55
di Poisson, 200
Traiettoria di fase, 212
Traiettorie chiuse, 66
Trasformazioni,
di Galilei, 33
di Legendre, 193
puntuale, 208
Trottola,
asimmetrica, 153, 174
sferica, 153
simmetrica, 153, 162, 169
veloce, 171

Variabile, angolare, 227
d'azione, 227
Variazione, 29
Velocità 65,
Vincoli,
anolonomi, 183
olonomi, 183